Réseaux et Systèmes linéaires en électronique.

P. Ribière

Collège Stanislas

Année Scolaire 2016/2017

1. Lois fondamentales de l'électrocinétique.
2. Système linéaire du premier ordre.
3. Système linéaire du second ordre.
4. Conclusion.

Plan

1. Lois fondamentales de l'électrocinétique.
   - Les lois de Kirchhoff.
   - Diviseur de tension, de courant.
   - Théorème de superposition.
   - Transformation Thévenin Norton
   - Réexpression de la loi des noeuds : théorème de Millman.
2. Système linéaire du premier ordre.
3. Système linéaire du second ordre.
4. Conclusion.

Cadre de validité de l'électrocinétique.

Les lois de l'électrocinétique sont valables dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires.
Le temps de propagation du signal électrique $\tau = \frac{d}{c}$ (dans un circuit de taille d) est négligeable devant la période T caractéristique du phénomène observé.
Le régime étudié est "lentement" variable.

La loi des noeuds.

La somme des courants entrants dans un noeud est égale à la somme des courants sortants.
(Liée à la conservation de la charge en régime quasi stationnaire.)

La loi des mailles.

La somme des tensions dans un maille est nulle.
(Une maille est une boucle fermée de circuit ne passant qu'une et une seule fois par un noeud donné.)

Exemple d'application :

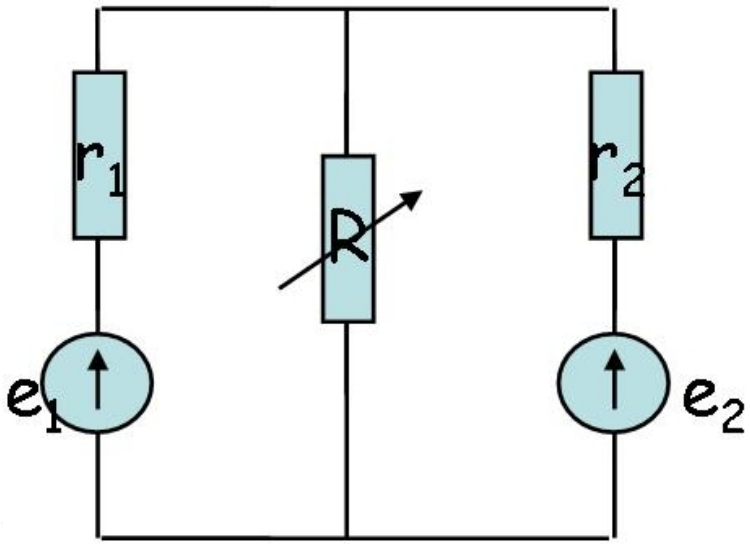


FIGURE – Etude d'un circuit linéaire.

Etude par la loi des noeuds et des mailles :
Sur un schéma

- Placer les courants.
- Placer les tensions (convention générateur et récepteur).
- Loi des noeuds et loi des mailles (avec convention de lecture).
- Résoudre.

Exemple d'application :

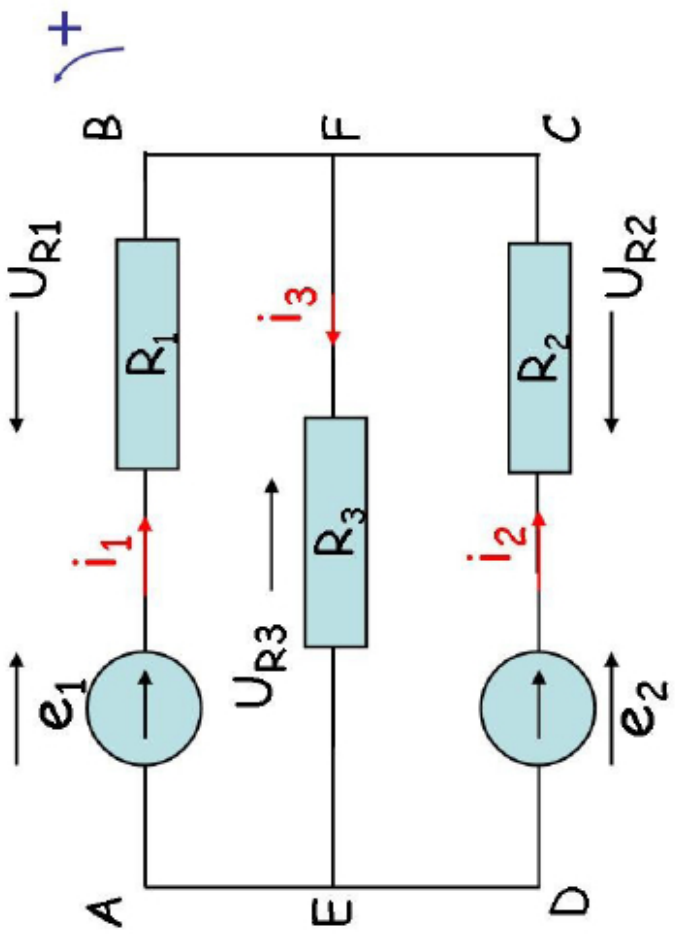


FIGURE – Etude d'un circuit linéaire.

Etude par la loi des noeuds et des mailles :

Sur un schéma

- Placer les courants.
- Placer les tensions (convention générateur et récepteur).
- Loi des noeuds et loi des mailles (avec convention de lecture).
- Résoudre.
  $e_1 = R_1.i_1 + R_3.i_3$
  $e_2 = R_2.i_2 + R_3.i_3$
  $i_1 + i_2 = i_3$

Plan

1. Lois fondamentales de l'électrocinétique.
   - Les lois de Kirchhoff.
   - Diviseur de tension, de courant.
   - Théorème de superposition.
   - Transformation Thévenin Norton
   - Réexpression de la loi des noeuds : théorème de Millman.
2. Système linéaire du premier ordre.
3. Système linéaire du second ordre.
4. Conclusion.

Eléments en série.

Des dipôles en série sont parcourus par un courant de même intensité.

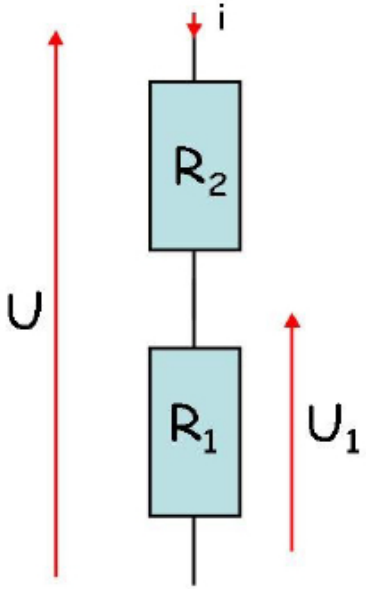


FIGURE – Résistance (impédance) en série.

- Résistance (impédance) équivalente :

$$R_{eq} = \sum_k R_k$$

- Diviseur de tension : $u_1 = R_1.i = \frac{R_1}{R_1+R_2}.u$

Des dipôles en parallèle.

Des dipôles en parallèle ont la même tension à leur borne.

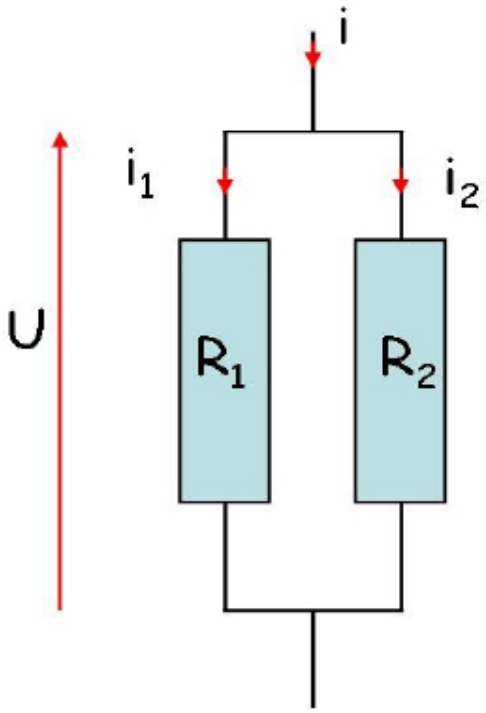


FIGURE – Résistance (impédance) en parallèle.

- Résistance (impédance) équivalente :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_k \frac{1}{R_k}$$

- Diviseur de courant : $i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}.i$

Plan

1. Lois fondamentales de l'électrocinétique.
   - Les lois de Kirchhoff.
   - Diviseur de tension, de courant.
   - Théorème de superposition.
   - Transformation Thévenin Norton
   - Réexpression de la loi des noeuds : théorème de Millman.
2. Système linéaire du premier ordre.
3. Système linéaire du second ordre.
4. Conclusion.

Théorème de superposition.

Dans un réseau **linéaire**, la réponse d'un dipôle à un ensemble de sources **indépendantes** est la superposition (algébrisée) des différentes réponses obtenues en ne considérant qu'une source active, les autres étant éteintes.

Exemple d'application :

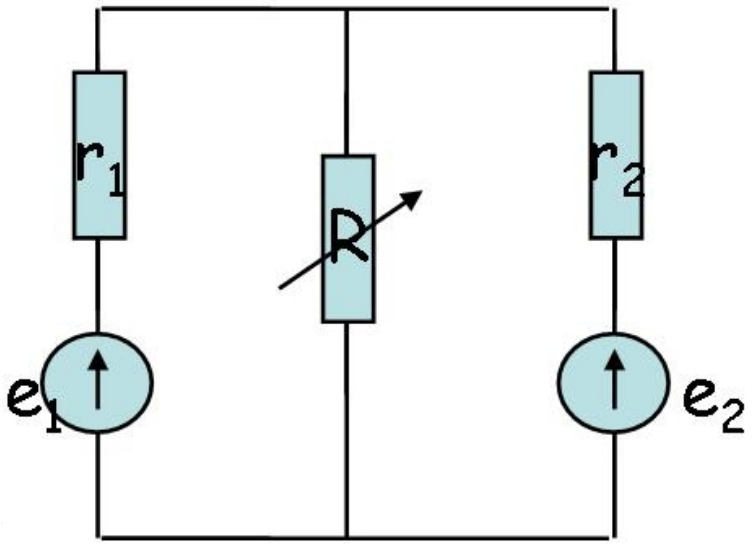


FIGURE – Etude d'un circuit linéaire.

Etude par le théorème de superposition :

Sur un schéma

- a. Eteindre une source, calculer $i_{3\ a}$
- b. Eteindre la seconde source, calculer $i_{3\ b}$
- $i_3 = i_{3\ a} + i_{3\ b}$

Plan

1. Lois fondamentales de l'électrocinétique.
   - Les lois de Kirchhoff.
   - Diviseur de tension, de courant.
   - Théorème de superposition.
   - Transformation Thévenin Norton
   - Réexpression de la loi des noeuds : théorème de Millman.
2. Système linéaire du premier ordre.
3. Système linéaire du second ordre.
4. Conclusion.

Deux réprésentations d'un seul et même générateur.

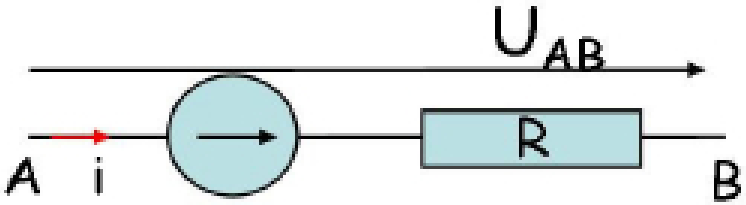


FIGURE – Représentation de Thévenin.

$u_{AB} = e_0 - Ri$

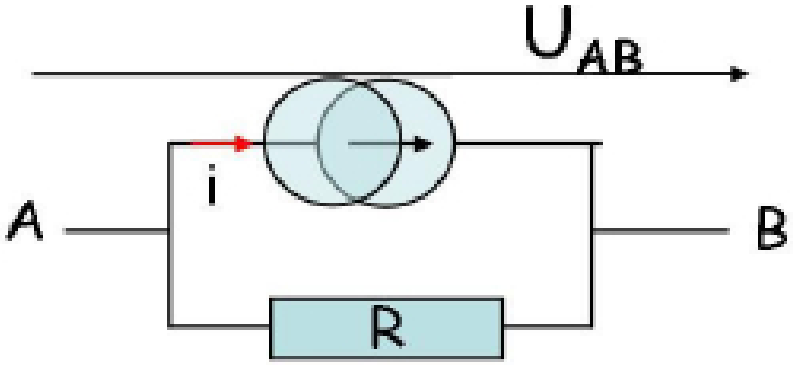


FIGURE – Représentation de Norton.

$u_{AB} = Ri_0 - Ri$

Lien entre les deux représentations.

La résistance dans les deux représentations est la même et le lien entre la source de courant idéale et celle de tension idéale est $e_0 = Ri_0$.

Association de générateurs.

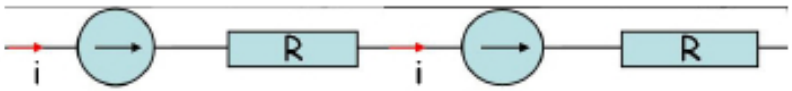


FIGURE – Association de générateurs de Thévenin en série.

$$e_{0\ eq} = e_{0\ 1} + e_{0\ 2}$$
$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

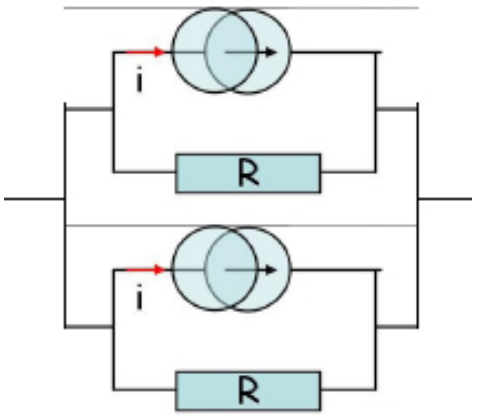


FIGURE – Association de générateurs de Norton en parallèle.

$$i_{0\ eq} = i_{0\ 1} + i_{0\ 2}$$
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Exemple d'application :

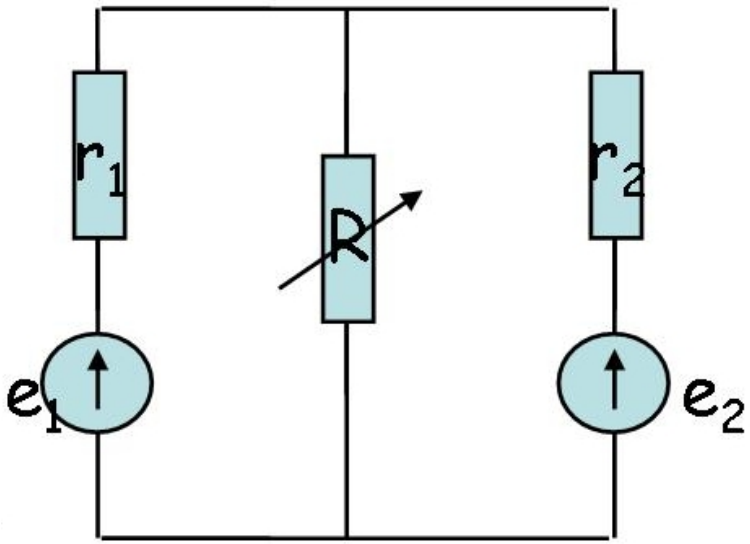


FIGURE – Etude d'un circuit linéaire.

Etude par les transformations Thévenin-Norton :
Sur un schéma

- Réunir les deux sources en une seule source.
- Résoudre.

Plan

1. Lois fondamentales de l'électrocinétique.
   - Les lois de Kirchhoff.
   - Diviseur de tension, de courant.
   - Théorème de superposition.
   - Transformation Thévenin Norton
   - Réexpression de la loi des noeuds : théorème de Millman.
2. Système linéaire du premier ordre.
3. Système linéaire du second ordre.
4. Conclusion.

Le théorème de Millman est une réexpression de la loi des noeuds en terme de potentiel.
Exemple d'application :

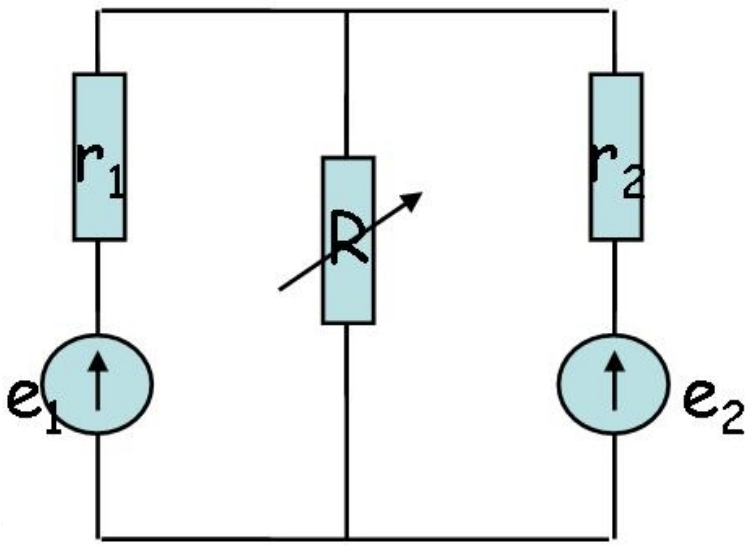


FIGURE – Etude d'un circuit linéaire.

Etude par le théorème de Millman **Lecture sur un schéma**

- Placer une référence des potentielles.
- Application du théorème de Millman au noeud F :

$$V_F = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{0}{R_2} + \frac{e_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

- $V_F = R_3.i_3$

Plan

1 Lois fondamentales de l'électrocinétique.

2 Système linéaire du premier ordre.
- Etude temporelle.
- Etude fréquentielle

3 Système linéaire du second ordre.

4 Conclusion.

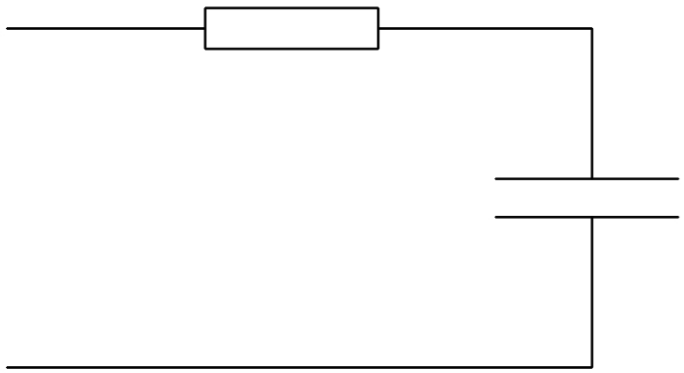


FIGURE – Circuit RC.

Equation différentielle

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = \omega_0 e(t)$$

Etude de la charge du condensateur :

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = \omega_0 E_0$$

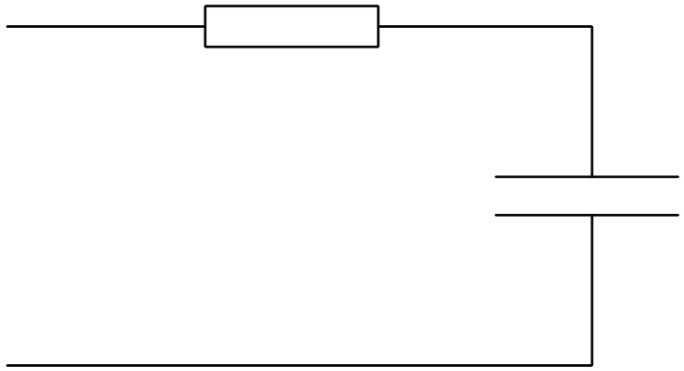


FIGURE – Circuit RC.

Equation différentielle

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = \omega_0 e(t)$$

Etude de la charge du condensateur :

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = \omega_0 E_0$$

Forme de la solution homogène, régime transitoire :
$s_{R.T.}(t) = A.\exp(-\omega_0.t)$
Forme de la solution en régime permanent constant :
$s_{R.P.}(t) = K(cste) = E_0$ par identification.
Forme de la solution générale : $s(t) = s_{R.T.}(t) + s_{R.P.}$

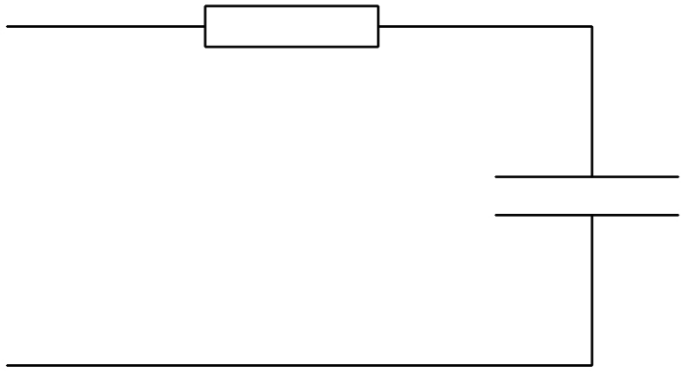


FIGURE – Circuit RC.

Equation différentielle

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = \omega_0 e(t)$$

Etude de la charge du condensateur :

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = \omega_0 E_0$$

Forme de la solution homogène, régime transitoire :
$s_{R.T.}(t) = A.\exp(-\omega_0.t)$
Forme de la solution en régime permanent constant :
$s_{R.P.}(t) = K(cste) = E_0$ par identification.
Forme de la solution générale : $s(t) = s_{R.T.}(t) + s_{R.P.}$

Deux conditions initiales pour déterminer les deux constantes d'intégration :
Continuité de la tension aux bornes du condensateur à $t = 0$: $s(t = 0^-) = s(t = 0^+) = 0$
Forme de la solution : $s(t) = A.\exp(-\omega_0.t) + e_0$
Par continuité de la tension aux bornes du condensateur : $s(t = 0^-) = s(t = 0^+) = 0$

$$s(t) = E_0(1 - \exp(-\omega_0.t))$$

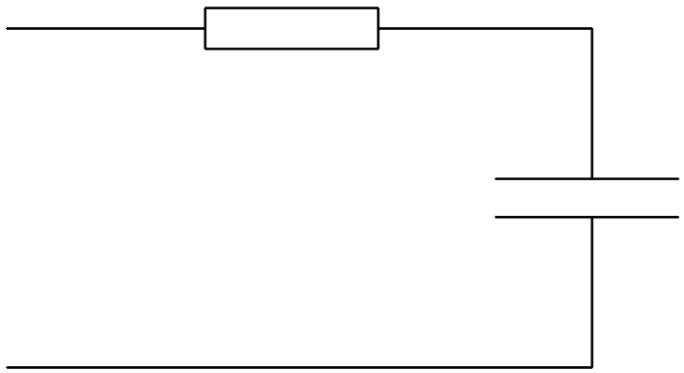


FIGURE – Circuit RC.

Equation différentielle

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = \omega_0 e(t)$$

Etude de la décharge du condensateur (initialement chargé)

$$\frac{ds}{dt'} + \omega_0 s(t') = 0$$

Forme de la solution : $s(t) = A.\exp(-\omega_0.t)$
Par continuité de la tension aux bornes du condensateur : $s(t' = 0^-) = s(t' = 0^+) = 0$

$$s(t') = E_0.\exp(-\omega_0.t'))$$

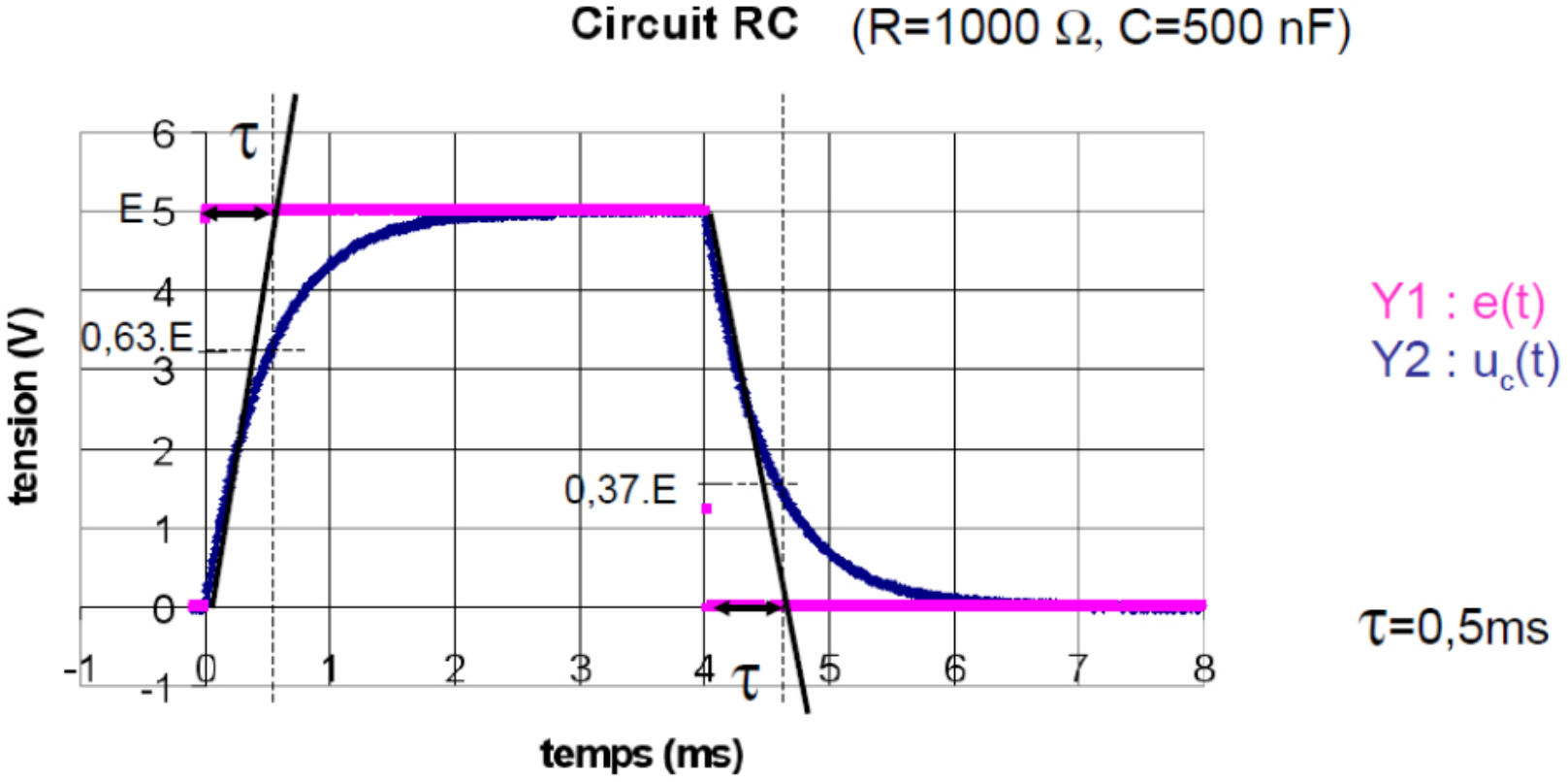


FIGURE – Numérisation d'un signal d'un RC soumis à un échelon de tension.

Bilan énergétique sur la charge :
Bilan élémentaire, pendant dt :

$$Ri^2dt + d(\frac{1}{2}Cu_C^2) = Eidt$$

Bilan global, pendant la charge :

$$\int_0^\infty Ri^2dt + \int_0^\infty d(\frac{1}{2}Cu_C^2) = \int_0^\infty Eidt$$

$$\int_0^\infty Ri^2dt + \frac{1}{2}CE_0^2) = CE_0^2$$

Lors de la charge, la moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance et l'autre moitié est stockée dans le condensateur.

Plan

1 Lois fondamentales de l'électrocinétique.

2 Système linéaire du premier ordre.
- Etude temporelle.
- Etude fréquentielle

3 Système linéaire du second ordre.

4 Conclusion.

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = \omega_0 e(t)$$

avec $e(t)$ un signal T-périodique.

Etude par la transformée de Fourier et méthode complexe.

Tout signal périodique e(t), de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ peut se décomposer série de Fourier :
$e(t) = a_0 + \sum_n a_n \cos(n.\omega.t)(+b_n \sin(n.\omega.t))$

L'équation est linéaire donc le principe de superposition s'applique.
(si e_1 et e_2 sont solutions, $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ est aussi solution)

Donc la résolution du problème à un signal périodique se ramène à la l'étude d'une composante "générique" du signal de Fourier :

$$e(t) = e_O \cos(\omega t)$$

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = \omega_0 e_0 \cos(\omega t)$$

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = \omega_0 e_0 \cos(\omega t)$$

La solution s'écrit de manière générale :

$$s(t) = s_{\text{transitoire}}(t) + s_{\text{régime sinusoïdal forcé}}(t)$$

Or, pour $t > 5\tau$, le régime transitoire est amorti, à cause des pertes énergétiques.
$s_{\text{transitoire}}(t) \simeq 0$. Il ne subsiste que le régime sinusoïdal forcé :

$$s(t) \simeq s_{\text{régime sinusoïdal forcé}}(t)$$

De plus, en régime sinusoïdal forcé, le système est forcé d'osciller de manière sinusoïdale à la même pulsation que le générateur.
Donc $s_{\text{régime sinusoïdal forcé}}(t)$ s'écrit :

$$s_{\text{régime sinusoïdal forcé}}(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Il ne reste donc à déterminer que deux paramètres, l'amplitude $s_0(\omega)$ et le déphasage $\varphi(\omega)$.
Remarque : la méthode par identification n'est pas efficace pour calculer l'amplitude et le déphasage. Il faut avoir recours à la méthode complexe.

Passage aux complexes pour simplifier la recherche de la solution en régime sinusoïdal forcé

Passage aux complexes.

$$e(t) = e_0 \cos(\omega t) \rightarrow \underline{e}(t) = e_0 \exp(j\omega t)$$

$$s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{s}(t) = \underline{s_0} \exp(j\omega t) \text{ avec } \underline{s_0} = s_0 exp(j\varphi)$$

Le module complexe contient toute l'information utile.
(Les facteurs $exp(j\omega t)$ se simplifient puisque la pulsation d'entrée est égale à la pulsation de sortie pour un système linéaire.)

$$s_0 = |\underline{s_0}| \text{ et } \varphi = arg(\underline{s_0})$$

Retour à la solution réelle.

$$s(t) = \Re(\underline{s}(t))$$

Intérêt des complexes.

$$\frac{ds}{dt} \leftrightarrow j\omega \underline{s}$$

Le passage aux complexes transforment (réversiblement) les équations différentielles en équations complexes.

Impédances complexes.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

$$\underline{Z} = R$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{Z}_L = jL\omega$$

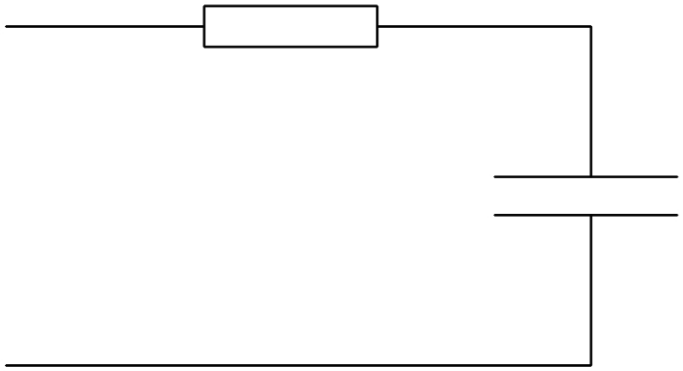


FIGURE – Circuit RC.

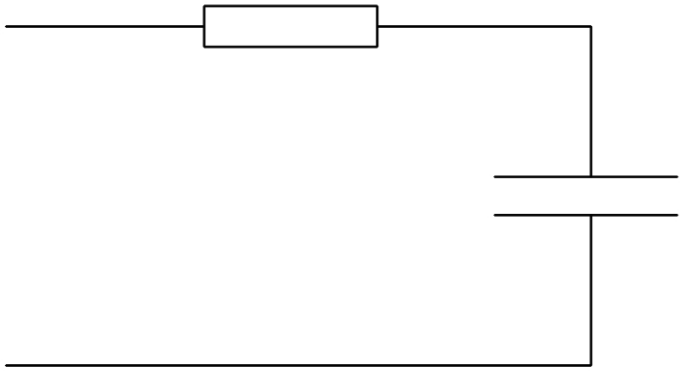


FIGURE – Circuit RC.

Obtention de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$:

- Passage de l'équation différentielle aux complexes.

$$\underline{s}(1 + jRC\omega) = \underline{e}$$

Puis par simplification par $exp(j\omega t)$:

$$\underline{s}_0(1 + jRC\omega) = \underline{e}_0$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

- En utilisant directement la notation complexe et les impédances caractéristiques.

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

(Et retour possible à l'équation différentielle.)

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + jx}$$

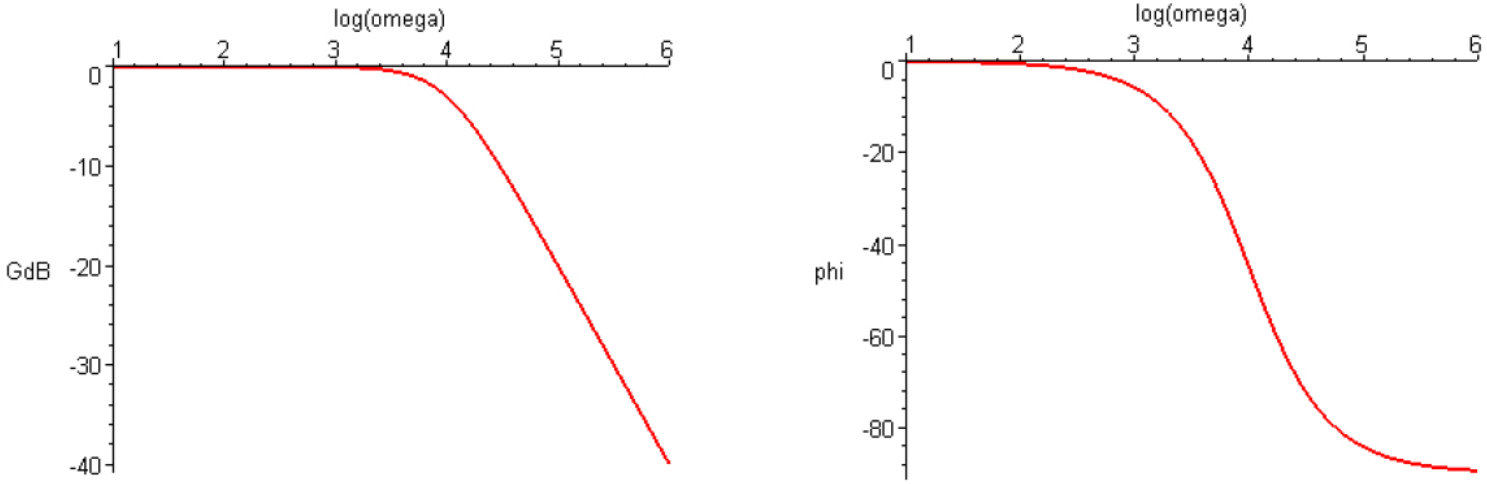


FIGURE – Diagramme de Bode du filtre passe bas du premier ordre.

$$G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|) \text{ et } \varphi = arg(\underline{H})$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + jx}$$

Etude du comportement basse fréquence.

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + jx}$$

Etude du comportement basse fréquence.
C équivalent à un interupteur ouvert donc $u_R = 0$ et $s(t) = e(t)$.
Quand $\omega \to 0$, $\underline{H} \simeq 1$ donc $G_{dB} \simeq 0$ et $\varphi \simeq 0$

Etude du comportement haute fréquence.

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + jx}$$

Etude du comportement basse fréquence.
C équivalent à un interupteur ouvert donc $u_R = 0$ et $s(t) = e(t)$.
Quand $\omega \to 0$, $\underline{H} \simeq 1$ donc $G_{dB} \simeq 0$ et $\varphi \simeq 0$

Etude du comportement haute fréquence.
C équivalent à un fil dont $s(t) = 0$.
Quand $\omega \to \infty$, $\underline{H} \simeq \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$ donc $G_{dB} \simeq -20\log(\frac{\omega}{\omega_0})$ et $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$
De plus, le filtre se comporte comme un intégrateur.

Etude du comportement pour $\omega = \omega_0$.

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + jx}$$

Etude du comportement basse fréquence.
C équivalent à un interupteur ouvert donc $u_R = 0$ et $s(t) = e(t)$.
Quand $\omega \to 0$, $\underline{H} \simeq 1$ donc $G_{dB} \simeq 0$ et $\varphi \simeq 0$

Etude du comportement haute fréquence.
C équivalent à un fil dont $s(t) = 0$.
Quand $\omega \to \infty$, $\underline{H} \simeq \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$ donc $G_{dB} \simeq -20\log(\frac{\omega}{\omega_0})$ et $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$
De plus, le filtre se comporte comme un intégrateur.

Etude du comportement pour $\omega = \omega_0$.
$\underline{H}(\omega_0) = \frac{1}{1+j}$ donc $G_{dB} \simeq -10\log(2) \simeq -3dB$ et $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{4}$
D'après la définition de la pulsation de coupure, ω_0 est la pulsation de coupure.

Plan

1. Lois fondamentales de l'électrocinétique.
2. Système linéaire du premier ordre.
3. Système linéaire du second ordre.
   - Etude temporelle.
   - Régime sinusoïdal forcé et Résonance.
   - Etude de la puissance en régime sinusoïdal forcé.
   - Etude fréquentielle.
   - Analogie électromécanique.
4. Conclusion.

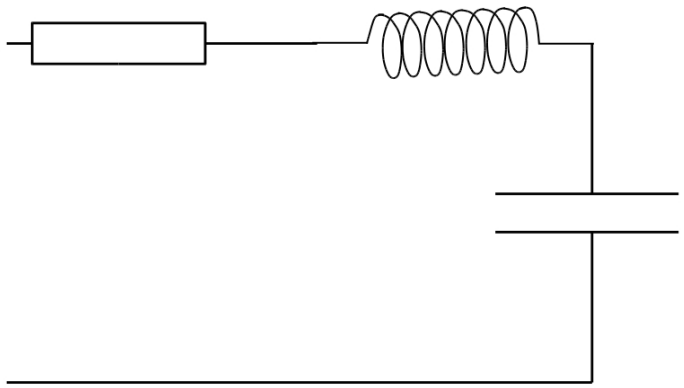


FIGURE – Circuit RLC série.

Equation différentielle

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}.\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = \omega_0^2 e(t)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2.\lambda.\omega_0.\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = \omega_0^2 e(t)$$

Etude de la charge du condensateur :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2.\lambda.\omega_0.\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = \omega_0^2 E_0$$

Forme de la solution homogène, régime transitoire :
Selon la valeur du discriminant du polynône caractéristique $\Delta = 4.\omega_0^2.(\lambda^2 - 1) = 4.\omega_0^2(\frac{1}{4.Q^2} - 1)$

Forme de la solution en régime permanent constant :
$s_{R.P.}(t) = K(cste) = E_0$ par identification.

Forme de la solution générale : $s(t) = s_{R.T.}(t) + s_{R.P.}$

Deux conditions initiales pour déterminer les deux constantes d'intégration :
Continuité de la tension aux bornes du condensateur à $t = 0$: $s(t = 0^-) = s(t = 0^+) = 0$
Continuité de l'intensité du courant traversant la bobine à $t = 0$: $\frac{ds}{dt}(t = 0^-) = \frac{ds}{dt}(t = 0^+) = 0$

Rappel sur les différentes solutions de l'équation homogène, i.e. différents régimes transitoires :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2.\lambda.\omega_0.\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = 0$$

Selon la valeur du discriminant du polynône caractéristique $\Delta = 4.\omega_0^2.(\lambda^2 - 1) = 4.\omega_0^2(\frac{1}{4.Q^2} - 1)$

- Premier Cas. $\Delta > 0$. Régime sous critique.
  Deux racines réelles. $x = -\lambda\omega_0 \pm \omega_0.\sqrt{\lambda^2 - 1}$.
  $s_{R.T.}(t) = A\exp(x_1.t) + B\exp(x_2.t)$.

- Deuxième cas. $\Delta < 0$. Régime pseudo périodique.
  Deux racines complexes conjuguées. $x = -\lambda\omega_0 \pm j\omega_0.\sqrt{1 - \lambda^2}$.
  $s_{R.T.}(t) = A\exp(x_1.t) + B\exp(x_2.t)$
  $s_{R.T.}(t) = \exp(-\lambda.\omega_0 t)(A\cos(\omega_0.\sqrt{1 - \lambda^2}.t) + B'\sin(\omega_0.\sqrt{1 - \lambda^2}.t)$
  $s_{R.T.}(t) = \exp(-\lambda.\omega_0.t)A''\cos(\omega_0.\sqrt{1 - \lambda^2}.t + \varphi)$

- Troisième cas. $\Delta = 0$ ($Q_0 = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$) Régime critique
  Le polynôme caractéristique admet une racine double réelle ω_0.
  $s_{R.T.}(t) = \exp(-\omega_0.t)(At + B)$.

Deux conditions initiales **sur la solution globale** pour déterminer les deux constantes d'intégration :
Continuité de la tension aux bornes du condensateur à $t = 0$: $s(t = 0^-) = s(t = 0^+) = 0$
Continuité de l'intensité du courant traversant la bobine à $t = 0$: $\frac{ds}{dt}(t = 0^-) = \frac{ds}{dt}(t = 0^+) = 0$

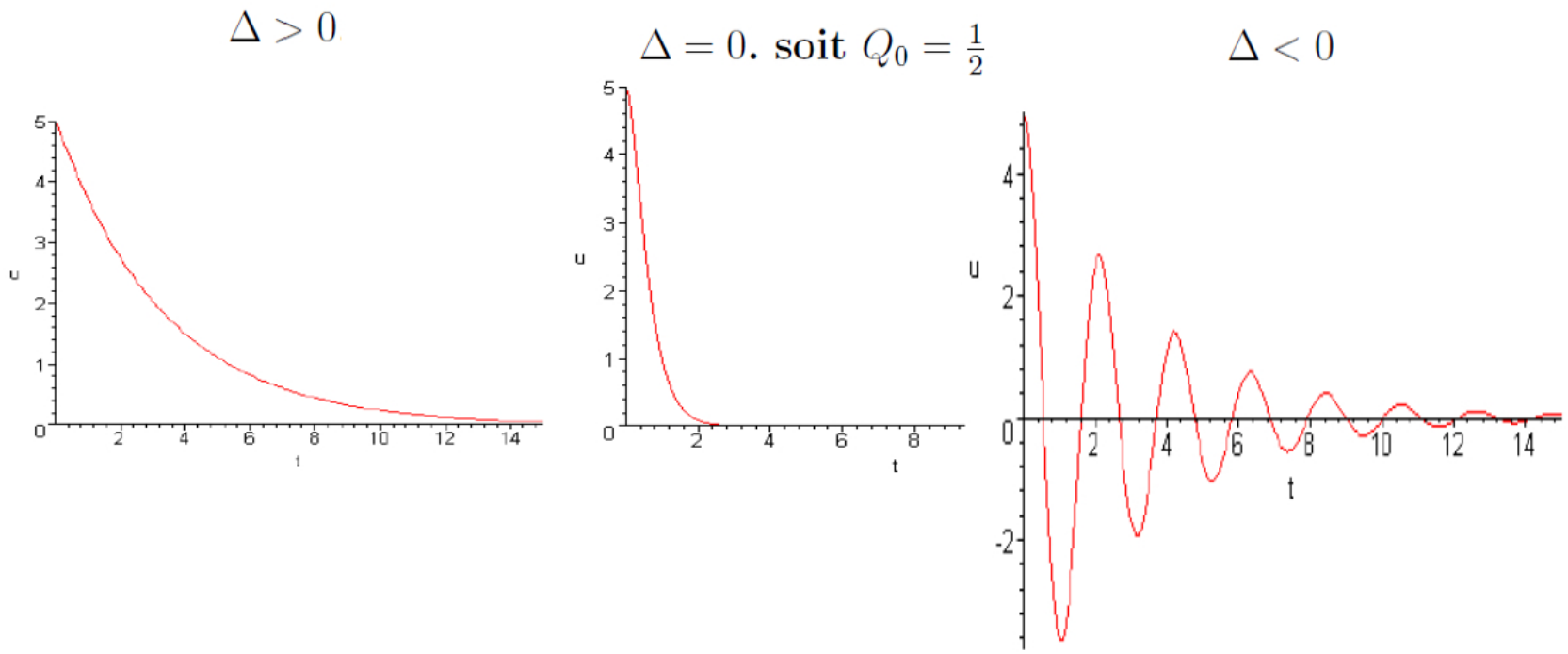


FIGURE – Divers régimes transitoires (décharge de C dans RLC série).

Le régime critique est le régime qui permet de retour le plus rapide vers le régime permanent, i.e. le régime transitoire est le plus rapidement amorti.

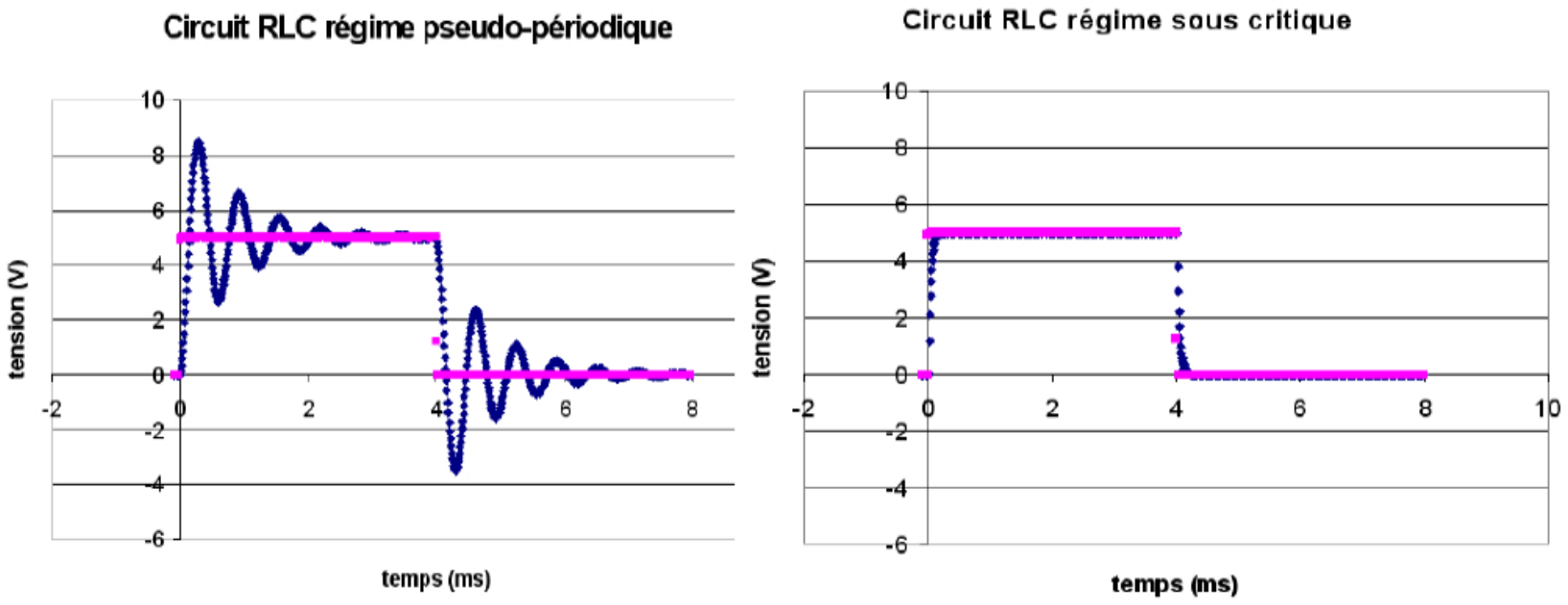


FIGURE – Visualisation expérimentale des régimes transitoires (décharge de C dans RLC série).

Bilan énergétique sur la charge :
Bilan élémentaire, pendant dt :

$$Ri^2dt + d(\frac{1}{2}Cu_C^2) + d(\frac{1}{2}Li^2) = E_0 idt$$

Bilan global, pendant la charge :

$$\int_0^\infty Ri^2dt + \int_0^\infty d(\frac{1}{2}Cu_C^2) + \int_0^\infty d(\frac{1}{2}Li^2) = \int_0^\infty E_0 idt$$

$$\int_0^\infty Ri^2dt + \frac{1}{2}CE_0^2 + 0 = CE_0^2$$

Lors de la charge, la moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance et l'autre moitié est stockée dans le condensateur, la bobine n'apparaît pas dans ce bilan.

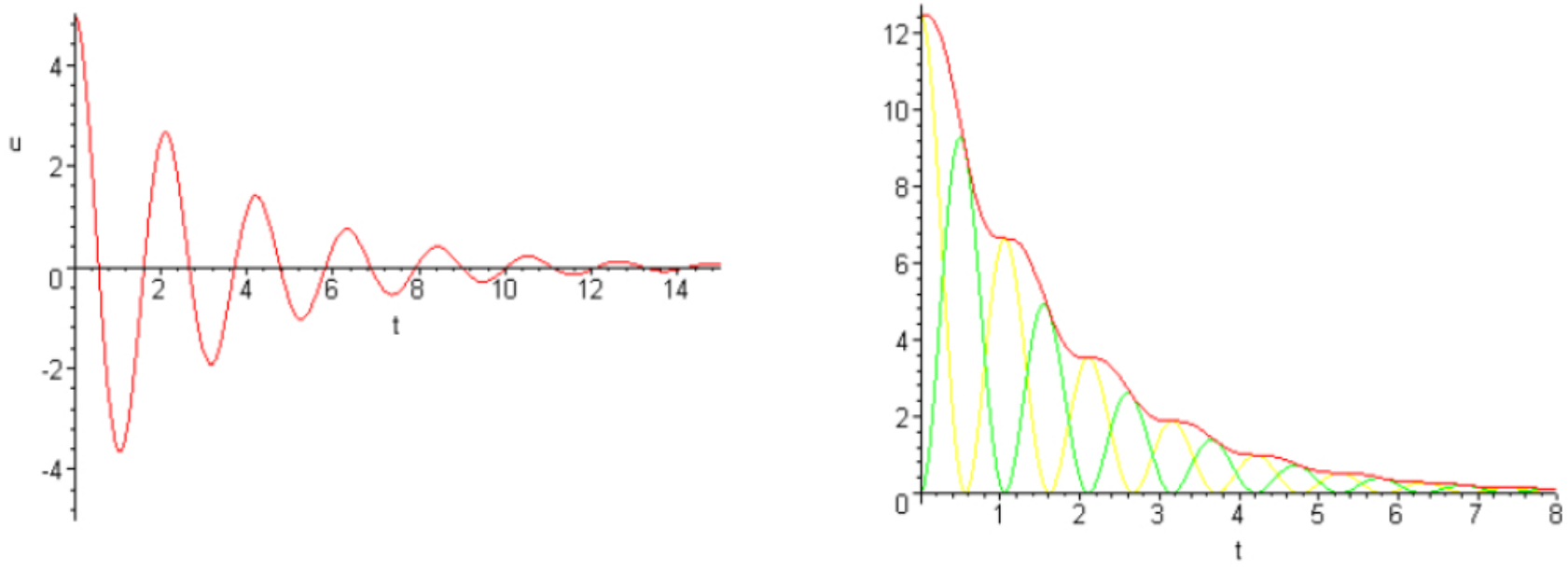


FIGURE – Etude énergétique lors de la décharge, régime pseudo-périodique.

Les oscillations du régimes pseudo-périodiques sont liés à un transfert d'énergie du condensateur vers la bobine et réciproquement, la diminution de l'amplitude du signal étant due aux pertes dans la résistance lors des transferts d'énergie bobine $\leftrightarrow$ condensateur.

Plan

1. Lois fondamentales de l'électrocinétique.
2. Système linéaire du premier ordre.
3. Système linéaire du second ordre.
   - Etude temporelle.
   - Régime sinusoïdal forcé et Résonance.
   - Etude de la puissance en régime sinusoïdal forcé.
   - Etude fréquentielle.
   - Analogie électromécanique.
4. Conclusion.

Etude du courant en régime sinusoïdal forcé dans le circuit RLC série.
Etude de l'amplitude en fonction de la pulsation du générateur, recherche du maximum d'amplitude : résonance.

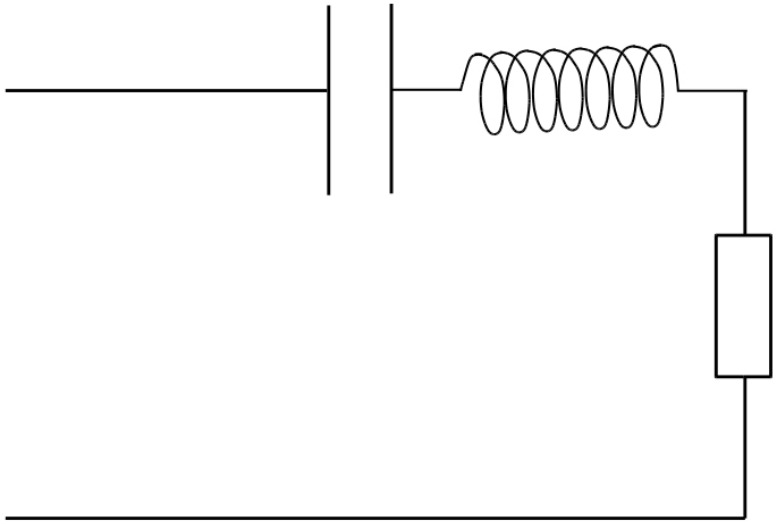


FIGURE – Etude de la résonance aux bornes de R.

$$\underline{i} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega}.\underline{e}$$

$$\underline{i} = \frac{1}{R(1 + jQ(x - \frac{1}{x})}.\underline{e}$$

Etude du courant en régime sinusoïdal forcé dans le circuit RLC série.
Etude de l'amplitude en fonction de la pulsation du générateur, recherche du maximum d'amplitude : résonance.

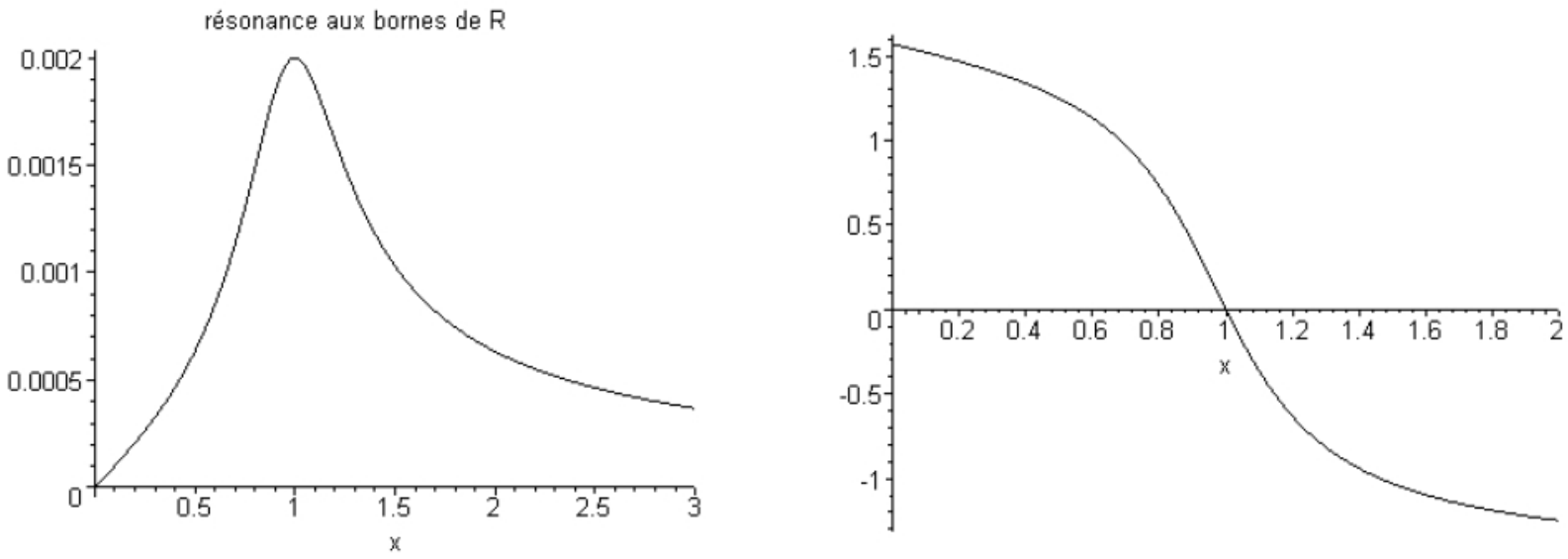


FIGURE – Etude de la résonance aux bornes de R.

Etude du courant en régime sinusoïdal forcé dans le circuit RLC série.
Etude de l'amplitude en fonction de la pulsation du générateur, recherche du maximum d'amplitude : résonance.

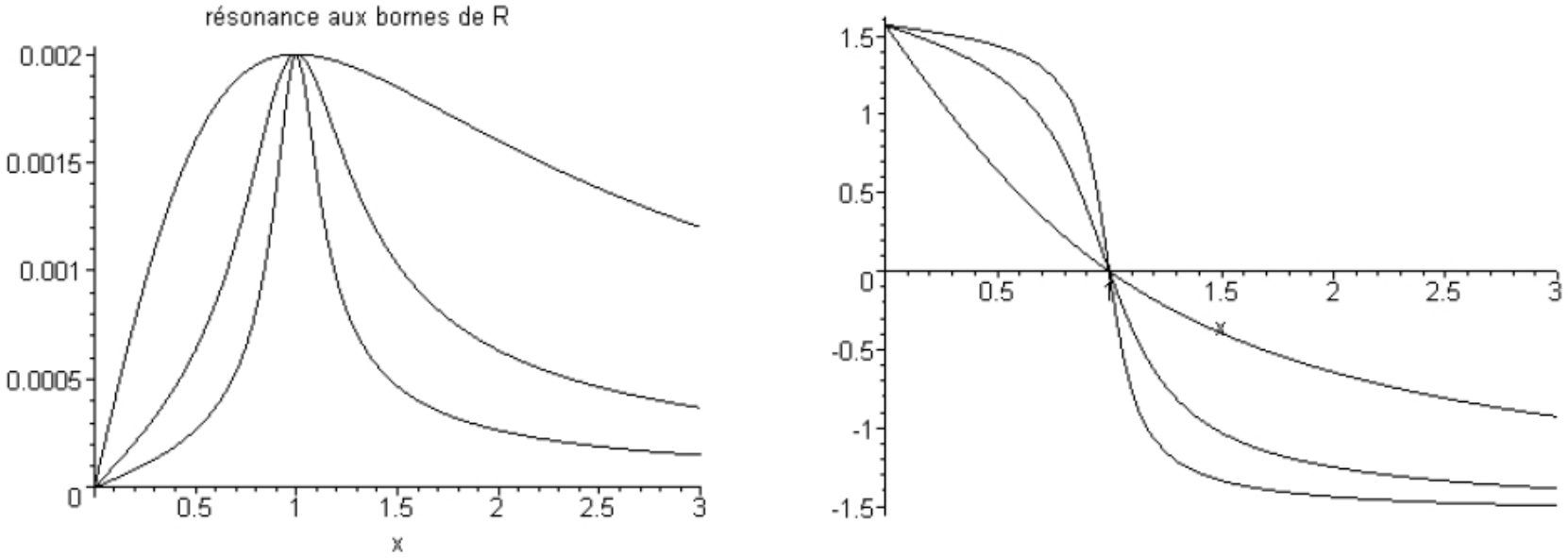


FIGURE – Etude de la résonance aux bornes de R pour divers facteur de qualité.

La résonance en intensité.

Pour la résonance en intensité (ou en tension aux bornes de R) :

- la résonance a lieu pour $\omega_{resonance} = \omega_0$
- la résonance a lieu pour tout facteur de qualité
- la résonance est plus piquée si le facteur de qualité est élevé

Etude de la tension $u_C(t)$ en régime sinusoïdal forcé dans le circuit RLC série.
Etude de l'amplitude en fonction de la pulsation du générateur, recherche du maximum d'amplitude : résonance.

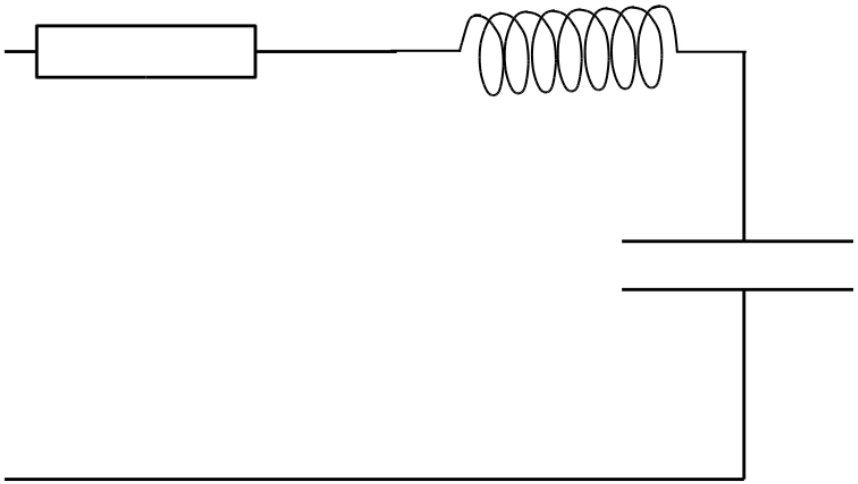


FIGURE – Etude de la résonance aux bornes de C.

$$\underline{u}_C = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \cdot \underline{e}$$

$$\underline{u}_C = \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} \cdot \underline{e}$$

Etude de la tension $u_C(t)$ en régime sinusoïdal forcé dans le circuit RLC série.
Etude de l'amplitude en fonction de la pulsation du générateur, recherche du maximum d'amplitude : résonance.

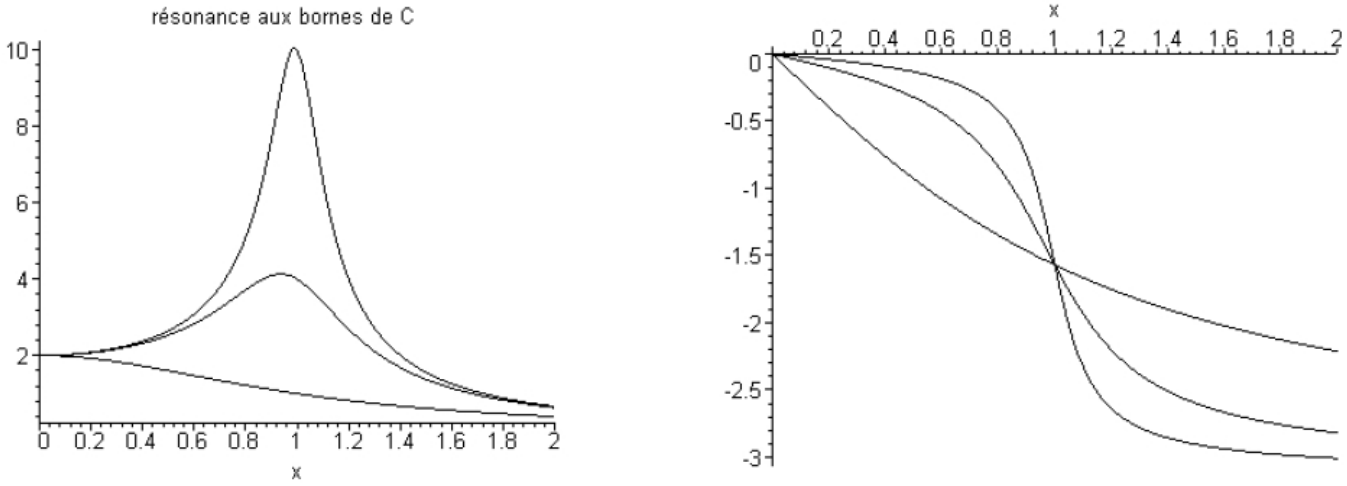


FIGURE – Etude de la résonance aux bornes de C pour divers facteur de qualité.

La résonance en tension (aux bornes de C).

Pour la résonance en tension aux bornes de C :

- la résonance a lieu pour $\omega_{resonance} \preceq \omega_0$
- la résonance a lieu si et seulement si le facteur de qualité est élevé ($Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$) résonance sous condition
- la résonance est plus piquée si le facteur de qualité est élevé et le maximum plus élevée.

Plan

1 Lois fondamentales de l'électrocinétique.

2 Système linéaire du premier ordre.

3 Système linéaire du second ordre.
- Etude temporelle.
- Régime sinusoïdal forcé et Résonance.
- Etude de la puissance en régime sinusoïdal forcé.
- Etude fréquentielle.
- Analogie électromécanique.

4 Conclusion.

Etude de la puissance instantanée en régime sinusoïdal forcé, en convention récepteur dans un circuit :
Retour aux grandeurs réelles pour les calculs de puissance, car grandeur quadratique.
$P(t) = u(t).i(t) = u_0 \cos(\omega t).i_0 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{u_0 i_0}{2}[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)]$.

Etude de la puissance moyenne en régime sinusoïdal forcé, en convention récepteur dans un circuit :
$P = \frac{1}{T}\int_0^T P(t')dt'$
$P = \frac{u_0 i_0}{2}\cos(\varphi) = u_{eff}\, i_{eff} \cos(\varphi)$
$\cos(\varphi)$ est le facteur de puissance du circuit

Pour une résistance, la puissance moyenne $P_R = Ri_{eff}^2$.
Pour une bobine idéale, la puissance moyenne $P_L = 0$.
Pour un condensateur idéal, la puissance moyenne $P_C = 0$.

Pour le cicruit RLC série, $P = P_R + P_L + P_C = P_R = \frac{e_0^2}{2R}\frac{1}{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}$

La résonance en puissance.

Pour la résonance en puissance est analogue à la résonance en intensité :

- la résonance a lieu pour $\omega_{resonance} = \omega_0$
- la résonance a lieu pour tout facteur de qualité
- la résonance est plus piquée si le facteur de qualité est élevé

Plan

1. Lois fondamentales de l'électrocinétique.
2. Système linéaire du premier ordre.
3. Système linéaire du second ordre.
   - Etude temporelle.
   - Régime sinusoïdal forcé et Résonance.
   - Etude de la puissance en régime sinusoïdal forcé.
   - Etude fréquentielle.
   - Analogie électromécanique.
4. Conclusion.

Etude du quadripôle aux bornes de la résistance :

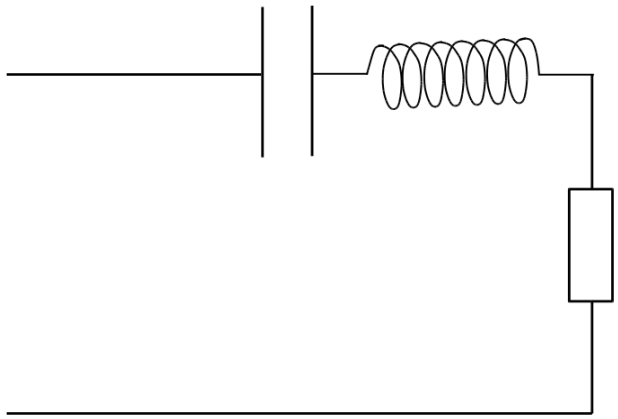


Figure – Quadripôle filtre aux bornes de R.

Etude a priori, déterminer la nature du filtre : filtre passe bande.

Détermination de la fonction de transfert.

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

Etude du quadripôle aux bornes de la résistance : $\underline{H} = \frac{1}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$

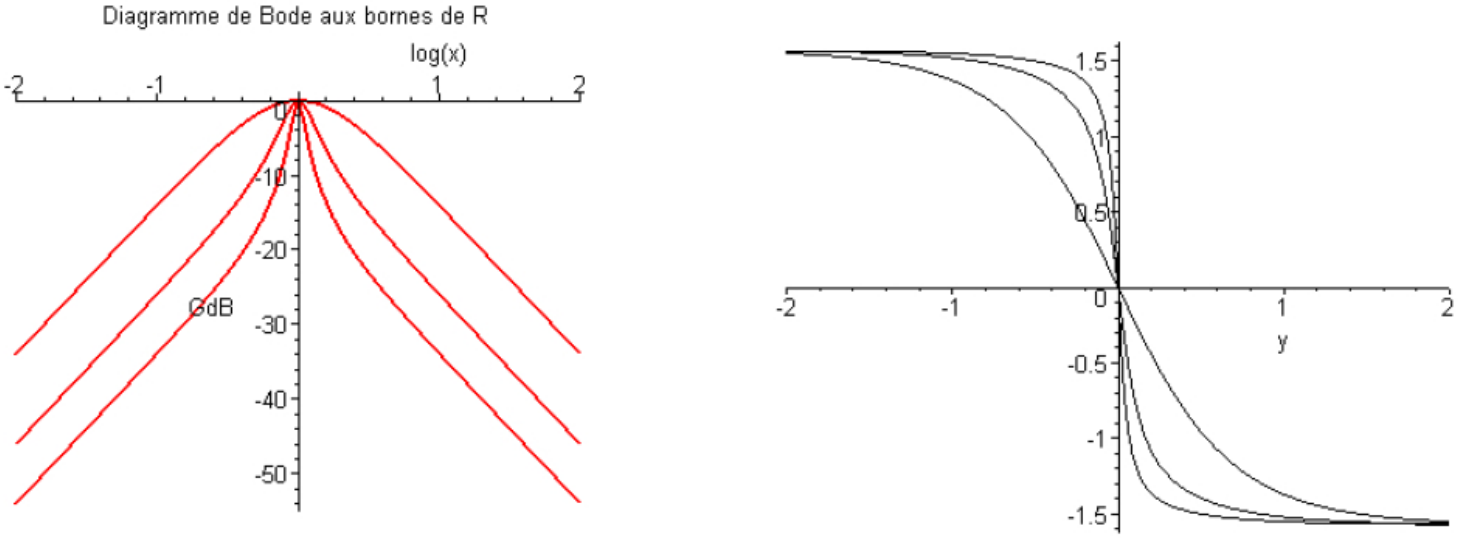


FIGURE – Diagramme de Bode du filtre passe bande du second ordre.

A basse fréquence,

Etude du quadripôle aux bornes de la résistance : $\underline{H} = \frac{1}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$

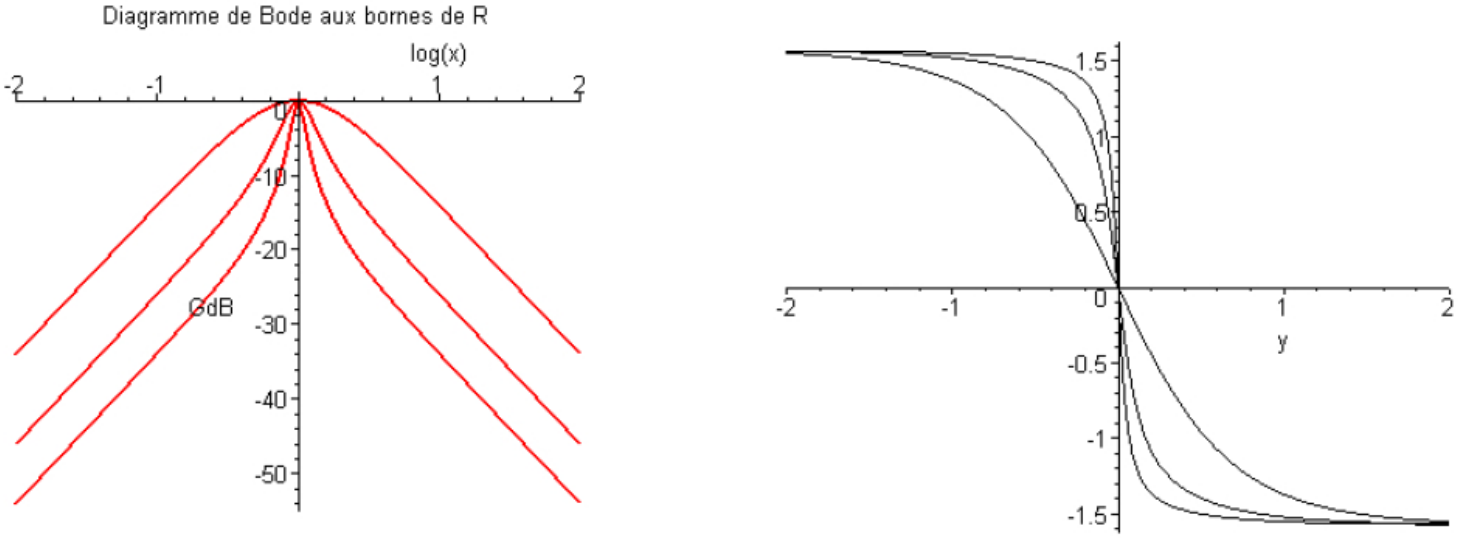


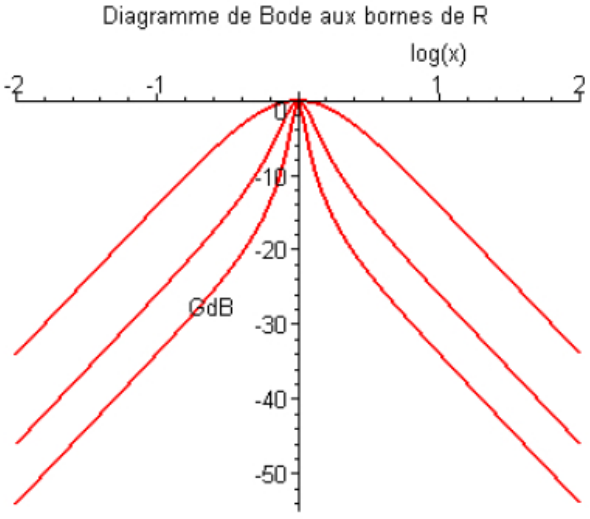
FIGURE – Diagramme de Bode du filtre passe bande du second ordre.

A basse fréquence, $\underline{H} \simeq \frac{1}{-jQ\frac{1}{x}}$ donc $G_{dB} \simeq 20\log(x)$ et $\varphi \simeq \frac{\pi}{2}$

De plus, le filtre se comporte comme un dérivateur.

A haute fréquence,

Etude du quadripôle aux bornes de la résistance : $\underline{H} = \frac{1}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$



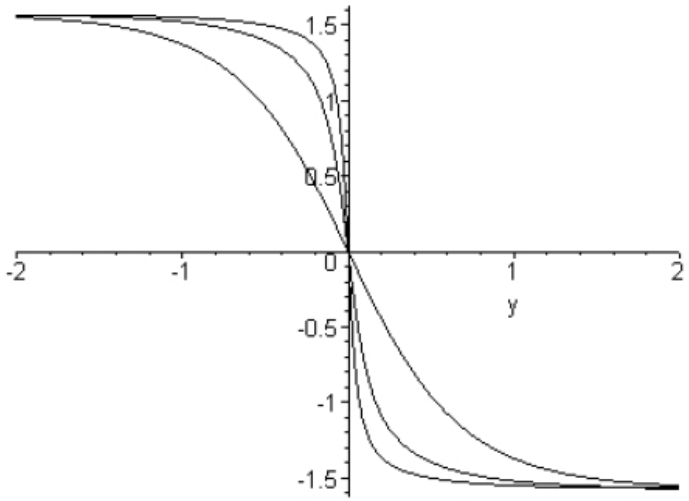


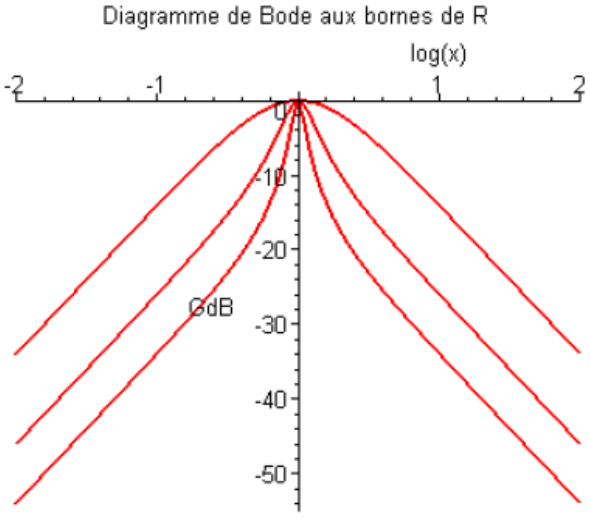
FIGURE – Diagramme de Bode du filtre passe bande du second ordre.

A basse fréquence, $\underline{H} \simeq \frac{1}{-jQ\frac{1}{x}}$ donc $G_{dB} \simeq 20\log(x)$ et $\varphi \simeq \frac{\pi}{2}$
De plus, le filtre se comporte comme un dérivateur.

A haute fréquence, $\underline{H} \simeq \frac{1}{jQx}$ donc $G_{dB} \simeq -20\log(x)$ et $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$
De plus, le filtre se comporte comme un intégrateur.

Pour $\omega = \omega_0$,

Etude du quadripôle aux bornes de la résistance : $\underline{H} = \frac{1}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$



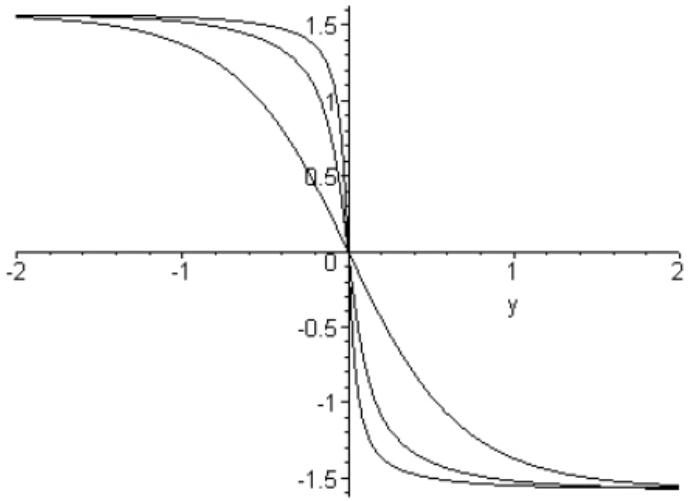


FIGURE – Diagramme de Bode du filtre passe bande du second ordre.

A basse fréquence, $\underline{H} \simeq \frac{1}{-jQ\frac{1}{x}}$ donc $G_{dB} \simeq 20\log(x)$ et $\varphi \simeq \frac{\pi}{2}$
De plus, le filtre se comporte comme un dérivateur.

A haute fréquence, $\underline{H} \simeq \frac{1}{jQx}$ donc $G_{dB} \simeq -20\log(x)$ et $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$
De plus, le filtre se comporte comme un intégrateur.

Pour $\omega = \omega_0$, $\underline{H}(\omega_0) = 1$ donc $G_{dB} = 0$ et $\varphi = 0$

Etude du quadripôle aux bornes du condensateur :

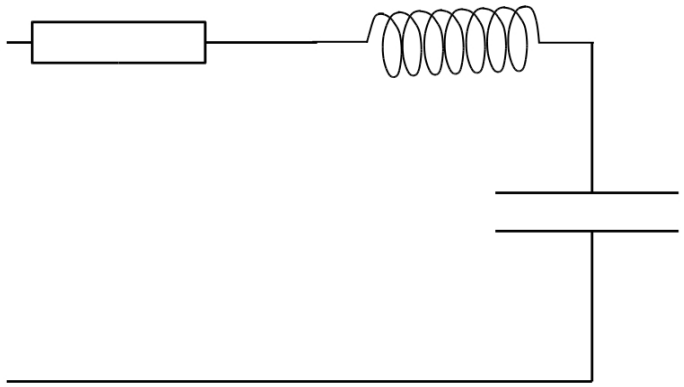


FIGURE – Quadripôle filtre aux bornes de C.

Etude a priori, déterminer la nature du filtre : filtre passe bas.

Détermination de la fonction de transfert.

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$$

Etude du quadripôle aux bornes du condensateur : $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$

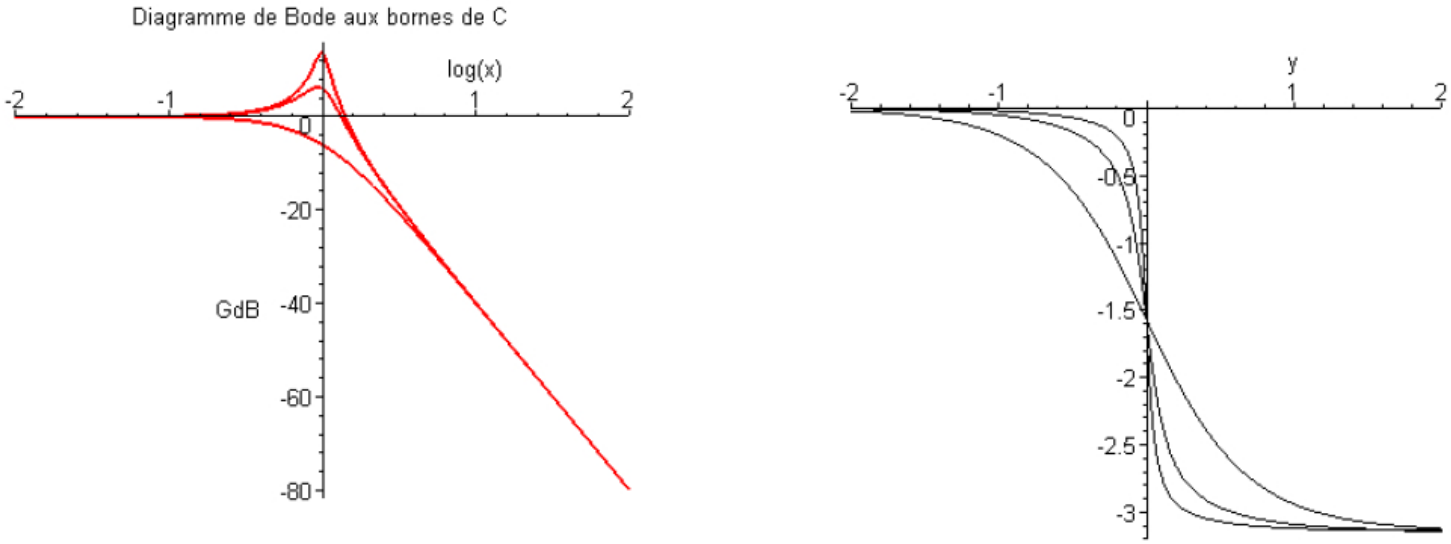


FIGURE – Diagramme de Bode du filtre passe bas du second ordre.

A basse fréquence,

Etude du quadripôle aux bornes du condensateur : $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$

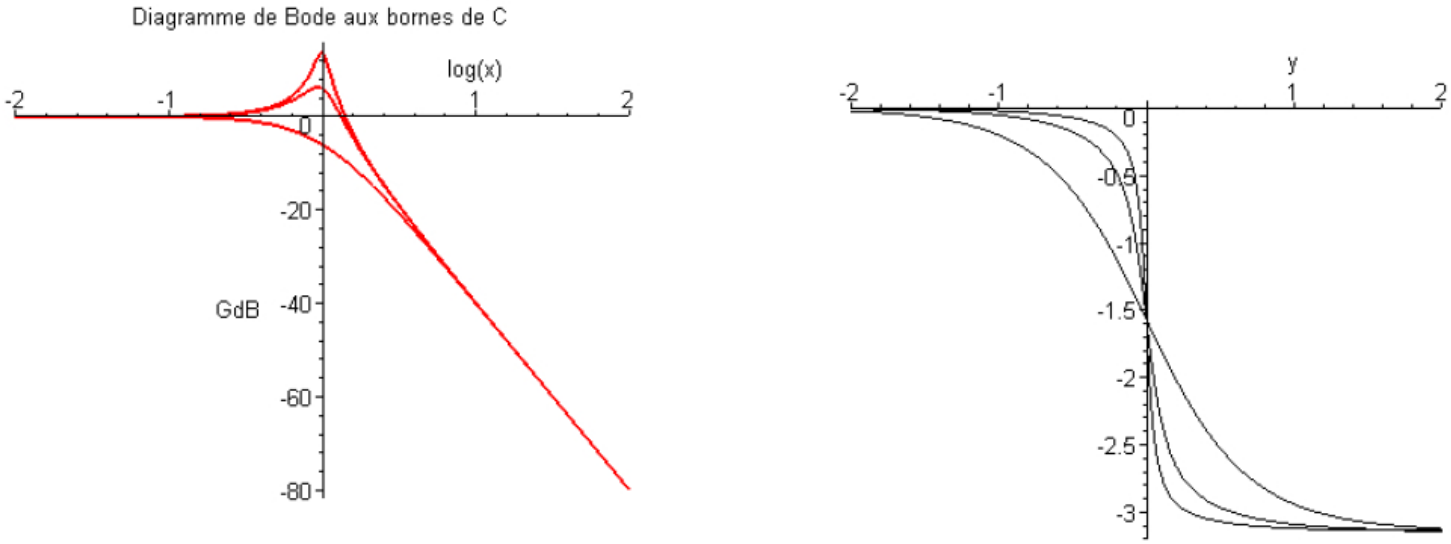


FIGURE – Diagramme de Bode du filtre passe bas du second ordre.

A basse fréquence, $\underline{H} \simeq 1$ donc $G_{dB} \simeq 0$ et $\varphi \simeq 0$

A haute fréquence,

Etude du quadripôle aux bornes du condensateur : $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$

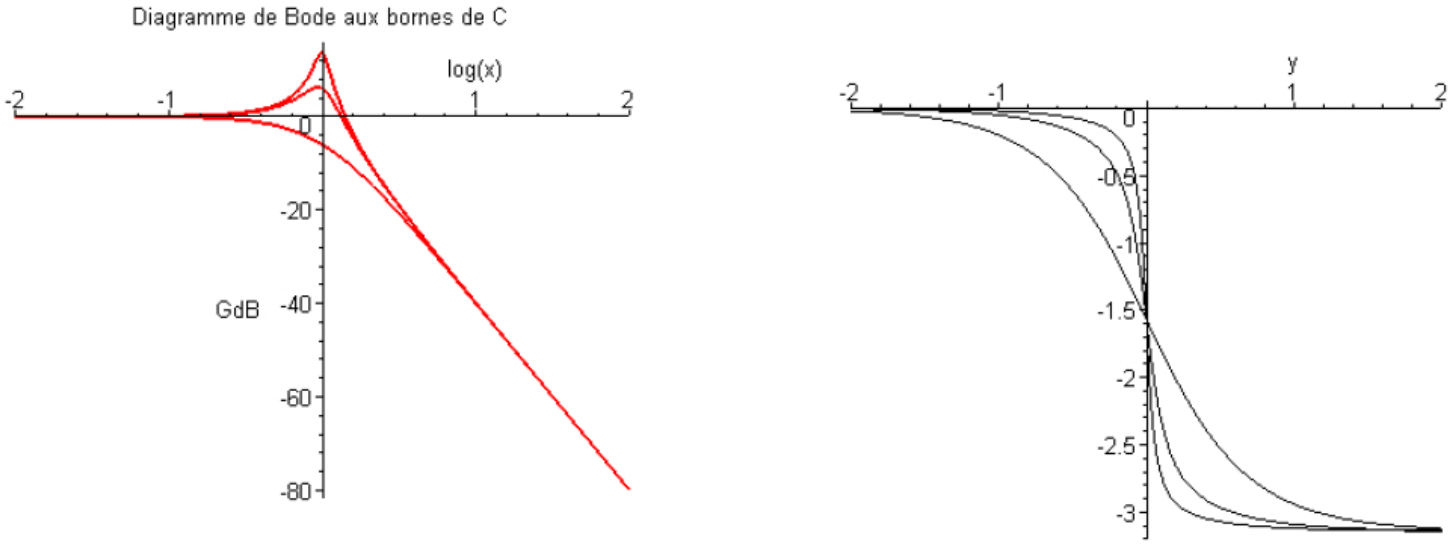


FIGURE – Diagramme de Bode du filtre passe bas du second ordre.

A basse fréquence, $\underline{H} \simeq 1$ donc $G_{dB} \simeq 0$ et $\varphi \simeq 0$

A haute fréquence, $\underline{H} \simeq \frac{1}{-x^2}$ donc $G_{dB} \simeq -40\log(x)$ et $\varphi \simeq -\pi$
De plus, le filtre se comporte comme un double intégrateur.

Pour $\omega = \omega_0$,

Etude du quadripôle aux bornes du condensateur : $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$

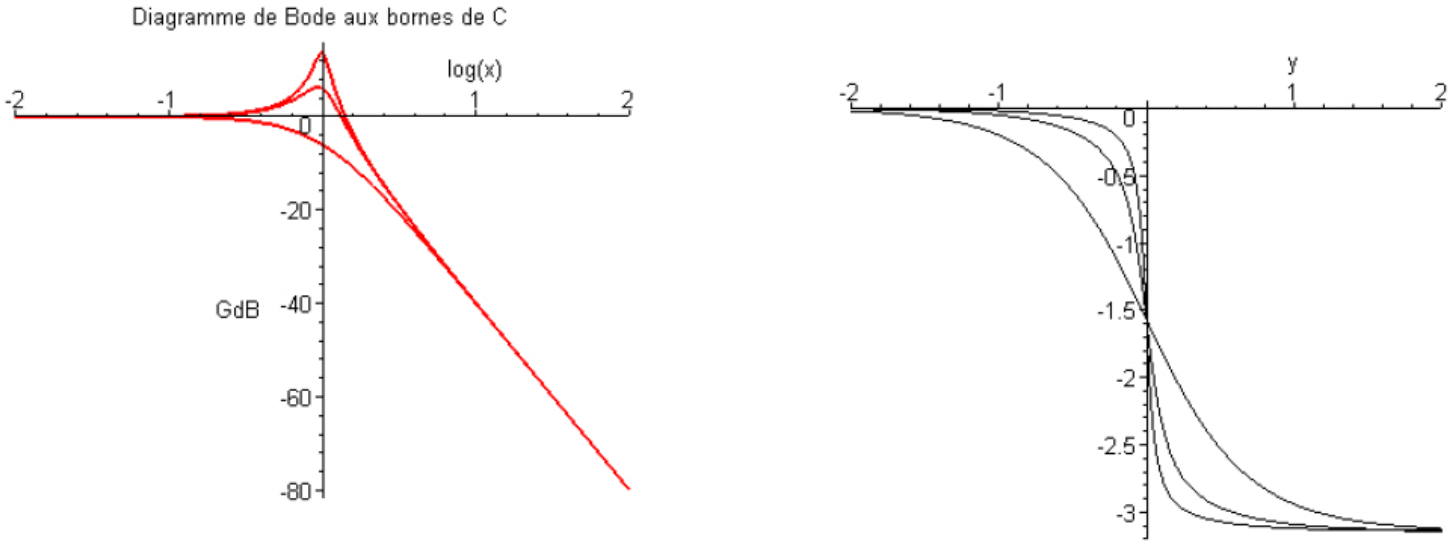


FIGURE – Diagramme de Bode du filtre passe bas du second ordre.

A basse fréquence, $\underline{H} \simeq 1$ donc $G_{dB} \simeq 0$ et $\varphi \simeq 0$

A haute fréquence, $\underline{H} \simeq \frac{1}{-x^2}$ donc $G_{dB} \simeq -40\log(x)$ et $\varphi \simeq -\pi$
De plus, le filtre se comporte comme un double intégrateur.

Pour $\omega = \omega_0$, $\underline{H}(\omega_0) = \frac{1}{j\frac{1}{Q}}$ donc et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Plan

1. Lois fondamentales de l'électrocinétique.
2. Système linéaire du premier ordre.
3. Système linéaire du second ordre.
   - Etude temporelle.
   - Régime sinusoïdal forcé et Résonance.
   - Etude de la puissance en régime sinusoïdal forcé.
   - Etude fréquentielle.
   - Analogie électromécanique.
4. Conclusion.

	RLC série	système masse ressort (avec frottement fluide)
grandeur d'évolution	$q(t)$ $i = \frac{dq}{dt}$	$x(t)$ $v = \frac{dx}{dt}$
équation différentielle (régime libre)	$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$	$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = 0$
inertie pertes rappel	L R $\frac{1}{C}$	m f k
énergie potentielle énergie cinétique Bilan énergétique	$E_C = \frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2$ $E_L = \frac{1}{2}Li^2$ $\frac{dE_{tot}}{dt} = -Ri^2$	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$ $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ $\frac{dE_{tot}}{dt} = -fv^2$

Plan

1 Lois fondamentales de l'électrocinétique.

2 Système linéaire du premier ordre.

3 Système linéaire du second ordre.

4 Conclusion.
- Conclusion.

Stabilité du régime linéaire.

Le régime linéaire d'un système est stable si les coefficients de l'équation différentielle homogène sont tous de même signe.

1. Lois fondamentales de l'électrocinétique.
   - Les lois de Kirchhoff.
   - Diviseur de tension, de courant.
   - Théorème de superposition.
   - Transformation Thévenin Norton
   - Réexpression de la loi des noeuds : théorème de Millman.
2. Système linéaire du premier ordre.
   - Etude temporelle.
   - Etude fréquentielle
3. Système linéaire du second ordre.
   - Etude temporelle.
   - Régime sinusoïdal forcé et Résonance.
   - Etude de la puissance en régime sinusoïdal forcé.
   - Etude fréquentielle.
   - Analogie électromécanique.
4. Conclusion.
   - Conclusion.