Interférence, diffraction. Agrégation

Ph. Ribière ribierep@orange.fr

Samedi 21 Janvier 2012

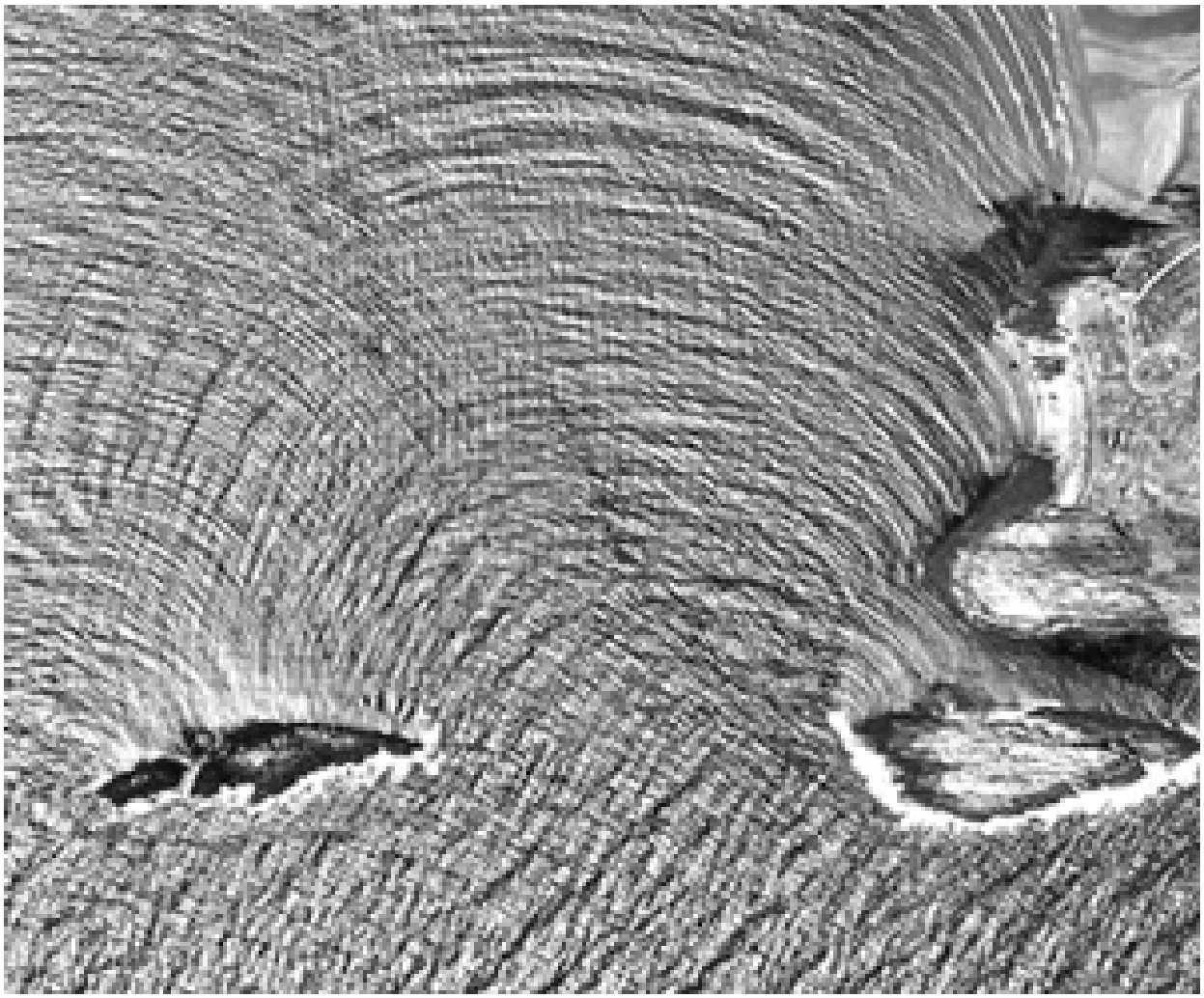

FIGURE 1 – Diffraction à la surface de l'eau, vue du ciel.

Chapitre 1

Interférences

L'optique géométrique (programme de 1ère année CPGE) permet de prédire le trajet de la lumière, c'est à dire la direction de propagation de l'onde (ou du vecteur de Poynting associé) dans le cas où l'indice n(M) du milieu traversé varie très peu à l'échelle de la longueur d'onde λ ($\lambda \in [400nm, 800nm]$ pour le visible) mais elle ne permet pas de comprendre le phénomène d'interférence et de diffraction.

Noter aussi que les phénomènes d'interférence et de diffraction ne sont pas limités au seul domaine de l'optique mais peuvent être observés pour toutes les ondes. Penser en particulier aux ondes sonores pour lesquels il suffit simplement d'adapter les dimensions à la longueur d'onde étudiée.

FIGURE 1.1 – Les fentes d'Young en onde capilaire : interférence et diffraction en vue d'artiste.

1.1 Modèle scalaire de l'onde, intensité lumineuse.

La lumière émise par une source lumineuse va êre décrite par un champ scalaire $a(M,t)$ de la forme suivante, d'après l'analyse de Fourier $a(M,t) = a_0 \cos(\omega(t - \tau_{[SM]}) + \varphi)$ où $\tau_{[SM]}$ désigne le temps nécessaire pour aller du point source S au point M.

Il faut exprimer ce retard de la propagation $\tau_{[SM]}$ et nous cherchons à l'écrire comme $\tau_{[SM]} = \frac{[SM]}{c_0}$ où c_0 désigne la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique dans le vide.
$[SM]$ désigne le chemin optique, qui est le trajet de la lumière du point source S au point M d'observation dans le milieu d'indice n(P).

$$[SM] = \int_{P\ deS}^{M} \frac{\vec{k}}{k_0}.d\vec{r}(P) = \int_{P\ deS}^{M} n(P)\vec{u}.d\vec{r}(P)$$

Le trajet optique est la "longueur" du trajet optique de la lumière dans le milieu d'indice n(p).
Pour une onde se porpageant en ligne droite dans un milieu homogène d'indice n : $[SM] = n.SM$.

Ainsi

$$a(M,t) = a_0 \cos(\omega t - k_0[SM] + \varphi) = a_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}[SM] + \varphi)$$

Néanmoins, la grandeur détectable n'est pas l'onde elle-même qui varie trop rapidement ($f \simeq 10^{15} Hz$) : les détecteurs de type photodiodes ou l'oeil sont sensibles à l'éclairement $\epsilon(M)$, moyenne quadratique de $a(M,t)$.

$$\epsilon(M) = 2. < a^2(M,t) >_T$$

où $< a(M,t) >_T = \frac{1}{T}\int_T a^2(M,t)dt$ est la valeur moyenne temporelle.

1.2 A la recherche des conditions de cohérence des ondes.

On s'intéresse à la superposition de deux ondes lumineuses.
$a_1(M,t) = a_{1\ 0} \cos(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_1 + \varphi_1)$ et
$a_2(M,t) = a_{2\ 0} \cos(\omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_2 + \varphi_2)$

1. Calculer l'éclairement résultant des deux ondes $\epsilon_{tot}(M) = 2. < a^2_{tot}(M,t) >_T$
   Montrer que $\epsilon_{tot}(M) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_{1,2}(M) = a^2_{1\ 0} + a^2_{2\ 0} + 4. < a_1(M,T).a_2(M,t) >_T$

2. Que dire de $\epsilon_{1,2}(M)$ appelé terme de corrélation ou terme d'interférence, dans le cas où les deux ondes sont **incohérentes** entre elles ?
3. Redémontrer les trois critères pour que ce terme d'interférence soit non nul.
4. Montrer que dans le cas des interférences,

$$\epsilon_{tot}(M) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_{1,2}(M)$$

avec

$$\epsilon_{1,2}(M) = 2.\sqrt{\epsilon_1}.\sqrt{\epsilon_2}\cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}([SM]_1 - [SM]_2)) = 2.\sqrt{\epsilon_1}.\sqrt{\epsilon_2}\cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M))$$

5. Montrer que cette formule dans le cas de deux ondes de même amplitude devient :

$$\epsilon_{tot}(M) = 2.\epsilon_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}([SM]_1 - [SM]_2))) = 2.\epsilon_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)))$$

6. Au vu des critères d'interférence, proposer différents types de systèmes expérimentaux permettant d'observer les interférences : les classer en deux catégories.

1.3 Interféromètre à division du front d'onde : l'expérience d'Young.

Un écran est percé de deux fentes nommée I_1 et I_2 très fines distantes de 2a. Cet écran est placé à une distance d d'une source supposée ponctuelle et d'une distance D d'un écran. L'axe source écran asse par le point O milieu des deux fentes.

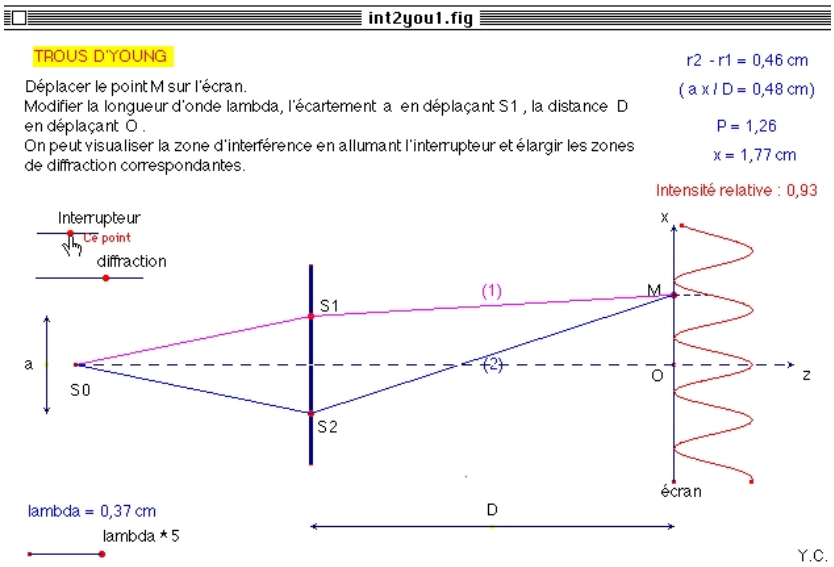

FIGURE 1.2 – Différence de Marche dans le dispositif d'Young et la figure d'interférence.

1. Montrer que la différence de marche pour un point M de coordonnée x sur l'écran est $\delta(M) \simeq a\frac{x}{D}$
2. En déduire l'éclairement ϵ_{tot}
3. Commenter les figures d'interférences proposées ci.

4. Considérons une lampe spectrale (lampe Sodium ou lampe Mercure) qui possède un doublet : deux pics lumineux très voisins dans le spectre $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq \lambda_m$ tel que $\Delta\lambda << \lambda_m$.
   Montrer que l'éclairement est dans ce cas :
   $\epsilon_{tot} = 4.\epsilon_0.(1 + \cos(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\delta(M))\cos(\frac{2.\pi}{\lambda_m}\delta(M)))$
   (Remarque : cette expérience est particulièrement facile pour un Michelson en lame d'air avec une étude de l'éclairement au centre de la figure d'interférence : l'expérience donne lieu à des battements optiques.)

5. Proposer une interprétation de la figure d'interférence dans le cas d'une lumière blanche figure 1.4, à l'aide de la figure 1.3.

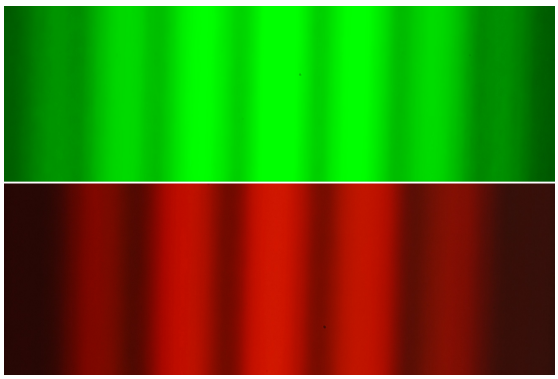

FIGURE 1.3 – Fentes d'Young en lumière verte (en haut) et en lumière rouge (en bas).

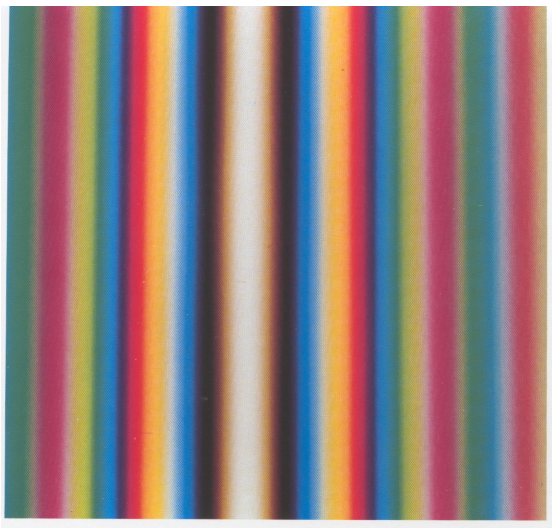

FIGURE 1.4 – Fentes d'Young en lumière blanche.

Chapitre 2

Diffraction

FIGURE 2.1 – Diffraction à la surface de l'eau.

2.1 Principe de Huygens-Fresnel.

Tous les points d'une surface $\sum$ soumis à un rayonnement incident ré-émettent ce rayonnement de manière cohérente dans toutes les directions.

Appliquons cela à des situations simples. Considérons d'abord comme surface $\sum$ un plan d'onde. Le principe de Huygens Fresnel revient à considérer que chaque point P (ou plus exactement chaque élement de surface infinitésimal $d\sigma(P)$) de la surface d'onde se comporte comme une source ponctuelle et elle ré-émet une onde. Or comme toutes ces sources fictives sont cohérentes, elles interfèrent entre elles pour donner le plan d'onde suivant.

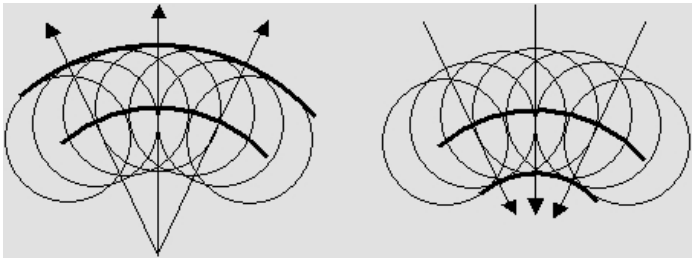

FIGURE 2.2 – Principe de la construction des surface d'ondes sphériques par le principe de Huygens.

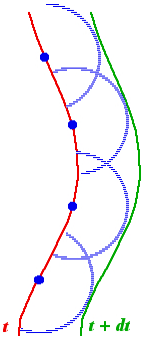

FIGURE 2.3 – Principe de la construction des surface d'ondes quelconque par le principe de Huygens.

2.2 Amplitude et éclairement d'une fente qui difracte la lumière.

Intéressons nous maintenant au cas qui nous intéresse, la diffraction par une fente. la surface $\sum$ alors prise en compte est l'ouverture plane éclairée.

1. Chaque élement de surface infinitésimal $d\sigma(P)$ de cette ouverture se comporte comme une source ponctuelle fictive. L'ondellette émise, notée $d\underline{a}(P,t)$, est porportionnelle à l'onde reçue et à la surface $d\sigma(P)$.
2. Toutes les ondes fictives sont cohérentes entre elles, donc susceptibles d'interférer (d'où l'utilisation des complexes.)

Mathématiquement, cela devient :

$$\underline{a}_{tot}(M,t) = \int\int_{P\in\sum} d\underline{a}(P,t)$$

$$\underline{a}_{tot}(M,t) = \int\int_{P\in\sum} Ka_0 exp(-jk_0(SPM))d\sigma(P)$$

Le facteur K est un facteur multiplicatif dimensionné $K \propto m^{-2}$.

Conditions de Fraunhofer.
Nous allons nous limiter à des calculs pour des systèmes expérimentaux en diffraction lointaines. Les conditions de Fraunhofer consiste à supposer que la source ainsi que le point d'observation sont à l'infini.
Il existe trois manières expérimentales de se placer dans les conditions de Fraunhofer :

1. En utilisant un laser (faisceau de lumière parallèle), ce qui est la manipulation couramment effectuée au lycée.
2. En plaçant l'écran et la source loin, à une distance D, du dispositif expérimentale de taille caractéristique a. ($D >> a$), ce qui est fait dans la manipulation des trous d'Young.
3. En plaçant la source dans le plan focal objet d'une lentille et en effectuant les observations dans le plan focal image d'une seconde lentille.

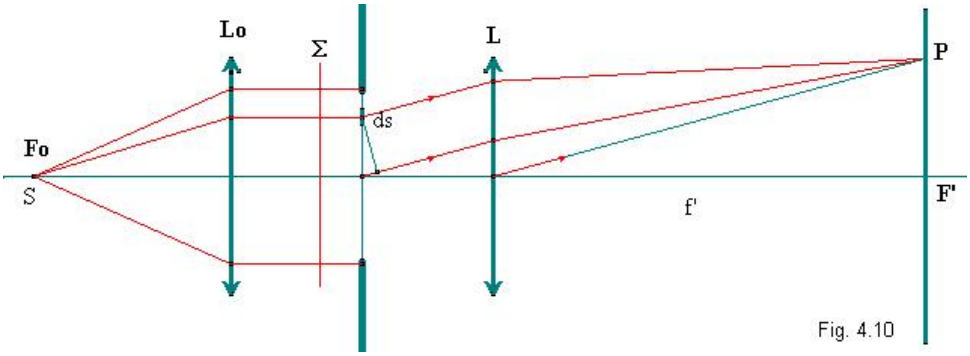

FIGURE 2.4 – Montage pour étudier la diffraction dans les conditions de Fraunhofer.

1. Montrer que l'amplitude de l'onde diffracté par une fente centrée en I de largeur e (comprise entre -e/2 et e/2), de largeur L très grande :

$$\underline{a}_{tot}(M,t) = KeL.a_0 exp(-jk_0(SIM)).sinc(k_0.\beta'.e/2)$$

   où β' désigne l'angle de la lumière avec l'axe des x après la fente.
2. En déduire que l'éclairement résultant pour une seule fente est donc :

$$\epsilon_tot = \epsilon_0.sinc^2(\pi\beta'/\lambda_0)$$

3. Commenter la fonction éclairement proposée figure ref 2.6.
4. De tels résultats sont-ils possible à interpréter par l'optique géométrique ?

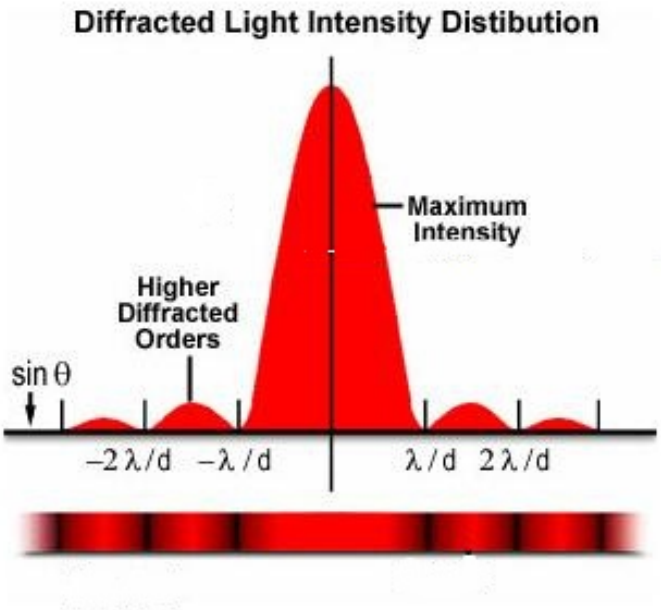

FIGURE 2.5 – Fonction de l'éclairement d'une fente : sinc^2.

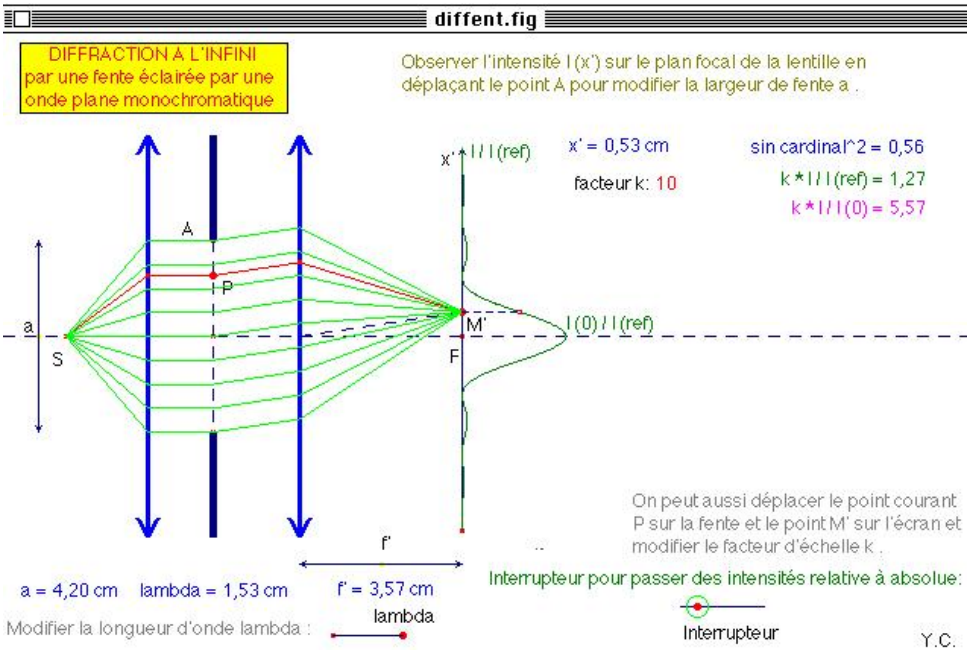

FIGURE 2.6 – Diffraction dans les conditions de Fraunhofer.

Remarque : la diffraction existe même pour grandes ouvertures. Elle est alors difficilement observable mais elle limite tout de même le pouvoir de résolution des téléscopes ce qui a conduit à construire des tééléscope de grandes dimensions. (Sur terre, les turbulences de l'atmosphère sont aussi très rapidement limitantes mais l'optique adaptative permet de corriger et donc finalement de s'affranchir partiellement de ces effets.)

2.3 Interférence et diffraction, retour sur l'expérience d'Young.

Revenons sur l'expériences des fentes d'Young. Il est maintenant clair que les deux fentes se comportent comme des sources secondaires cohérentes. En supposant les fentes très fines, la diffraction est quasi-isotrope.
Intéressons nous au cas vu précédemment :
Un écran est percé de deux fentes nommée I_1 et I_2 de largeur e, et de grande longueur L, distantes de 2a. Cet écran est placé à une distance d d'une source supposée ponctuelle et d'une distance D d'un écran. L'axe source écran asse par le point O milieu des deux fentes.

1. Calculer l'amplitude de l'onde diffractée par une fente centrée en I_1 de largeur e (comprise entre -e/2 et e/2), de largeur L très grande.
2. En déduire l'amplitude de l'onde diffractée par une fente centrée en I_2 de largeur e (comprise entre -e/2 et e/2), de largeur L très grande.
3. Montrer que l'éclairement résultant pour les deux fentes est donc :

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_0 sinc^2(\pi\beta' e/\lambda_0)(1+\cos(2\pi\beta' a/\lambda_0)$$

4. Commenter la fonction éclairement proposée figure ref 2.6.
5. De tels résultats sont-ils possibles à interpréter par l'optique géométrique ?

On constate ici un résultat général (qui se démontre à partir des propriétés de la transformée de Fourier sous jacente à la diffraction), que terme d'interférence est modulé par le terme de diffraction :

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_{motif}(M).Interference_{entre\ motifs}(M)$$

où $\epsilon_{motif}(M)$ est le terme d'éclairement correspondant à la diffraction par un motif
et $Interference_{entre\ motifs}(M)$ le terme d'interférence à N ondes, interférences entres les ondes issues des N motifs.

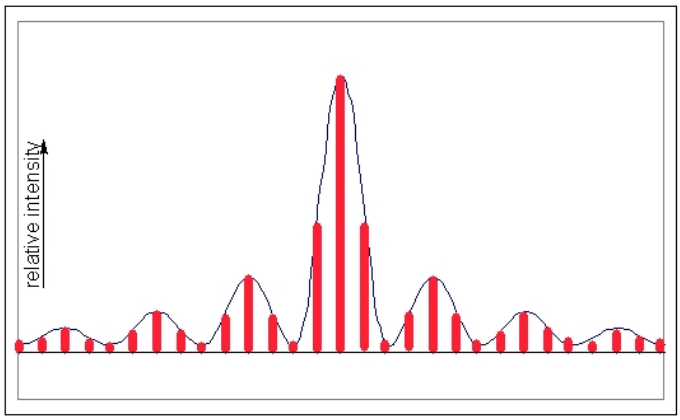

FIGURE 2.7 – Interférence et diffraction : chaque fente donne naissance à une phénomène de diffraction et la lumière provenant des deux sources interfèrent.

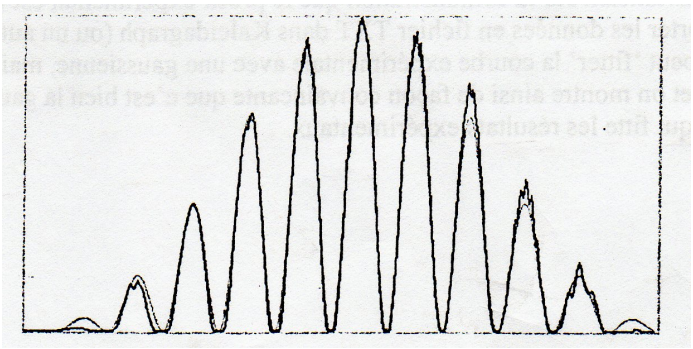

FIGURE 2.8 – Interférence et diffraction : enregistrement de l'éclairement et modélisation au laboratoire.