Onde. Agrégation

Ph. Ribière ribierep@orange.fr

Samedi 10 Décembre 2011

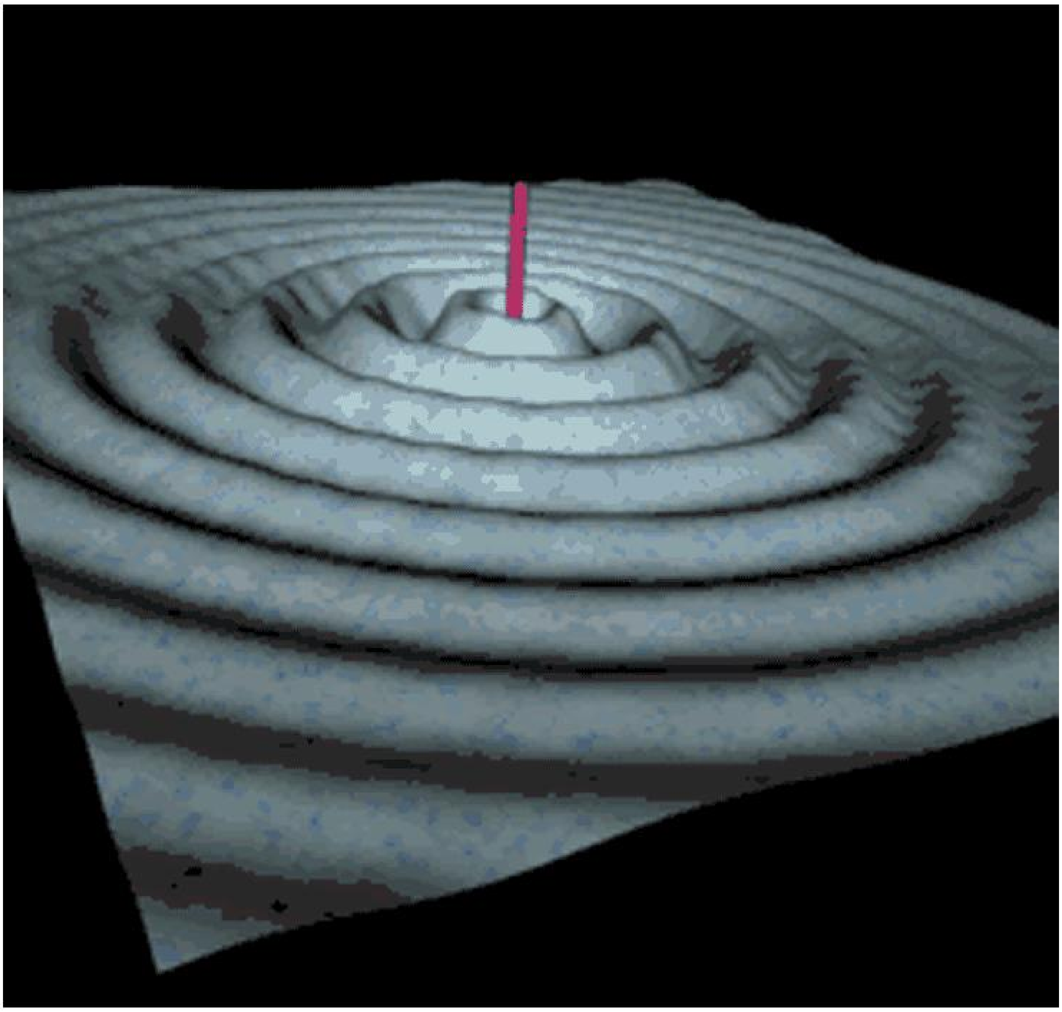

FIGURE 1 – Onde sphérique

Chapitre 1

Les ondes électromagnétiques.

1.1 Equation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

1. Rappeler les équations de maxwell.

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.1}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{1.3}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.4}$$

2. Simplifier ces équations dans le cas du vide.
3. Recherche de l'équation de propagation par analyse vectorielle.
   (a) Montrer l'équation de propagation de $\vec{E}$ dans le vide est :

   $$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \ \text{ avec } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

   Commenter.

   (b) Montrer l'équation de propagation de $\vec{B}$ dans le vide est :

   $$\vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \ \text{ avec } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

   (c) On s'intéresse alors alors à une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_y$: $vecE = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$. Simplifier l'équation de propagation du champ électrique dans le vide.

(d) Montrer alors que la relation de dispersion est

$$k = \frac{\omega}{c}$$

(e) Montrer que l'onde est transversale :

$$\vec{u}.\vec{E} = 0$$

$$\vec{u}.\vec{B} = 0$$

4. Recherche de l'équation de propagation en supposant l'onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_y$: $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$ et $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$.
   (a) Simplifier les équations de Maxwell dans le cas ci dessus.
   (b) Montrer que l'onde est transversale :

$$\vec{u}.\vec{E} = 0$$

$$\vec{u}.\vec{B} = 0$$

   (c) Montrer l'équation de propagation de $\vec{E}$ dans le vide est :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

   Commenter.
   (d) Montrer alors que la relation de dispersion est

$$k = \frac{\omega}{c}$$

5. Recherche de l'équation de propagation en supposant l'onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement suivant $\vec{u}_y$: $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp j(\omega t - kx)\vec{u}_y$ et $\underline{\vec{B}} = B_0 \exp j(\omega t - kx)\vec{u}_z$.
   (a) Montrer que l'onde est transversale :

$$\vec{u}.\vec{E} = 0$$

$$\vec{u}.\vec{B} = 0$$

   (b) Montrer alors que la relation de dispersion est

$$k = \frac{\omega}{c}$$

6. Etudier la structure des OPP dans le vide, en revenant aux équations découplées du premier ordre.

(a) Montrer que

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

(b) Ces résultats sont ils généralisables à une OPP ?

7. Etude énergétique de l'onde plane.

(a) Calculer le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne temporelle. Montrer alors que

$$< \vec{\Pi} >= \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_x$$

Commenter.

(b) Calculer l'énergie volumique associée à l'onde électromagnétique et sa valeur moyenne temporelle. Montrer alors que

$$< u_{e\ m} >= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

Commenter

(c) Commenter le lien entre vecteur de Poynting et énergie volumique.

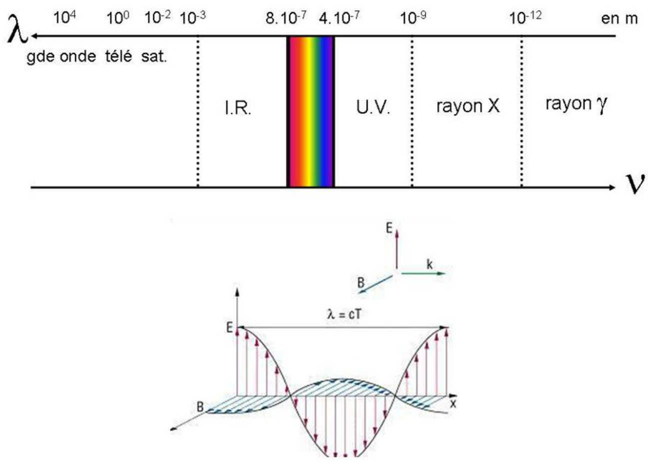

FIGURE 1.1 – Onde électromagnétique.

1.2 Le guide d'onde : dispersion dues aux conditions aux limites.

Le guide d'onde de longueur infinie est de section rectangulaire $a.b$: $0 < x < a$ et $0 < y < b$. Il est fait de métal assimilé à un conducteur parfait (donc le champ électrique et magnétique à l'intérieur du métal est nul.) L'intérieur du guide d'onde est remplie d'air assimilé à du vide.

1. A partir des équations de passages des champs, justifier que la composante tangentielle au métal du champ électrique est nulle $\vec{E}_t = \vec{0}$ et que la composante normale au métal du champ magnétique est nulle $\vec{B}_n = \vec{0}$
2. Dans la suite, on cherche des solutions de la forme $\underline{\vec{E}} = A(x,y)\exp(j\omega t - jk_g z)\vec{u}_y$.
   Montrer que A ne dépend pas de y.
   Montrer que l'équation dont A est solution est
   $$\frac{d^2A}{dx^2} + (\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2)A = 0$$
   Compte tenu des Conditions aux limites, montrer que $\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 > 0$. Montrer alors que
   $$\underline{\vec{E}_n} = A_{0,n}\sin(\frac{n\pi x}{a})\exp(j\omega t - jk_{g,n}z)\vec{u}_y \quad \text{avec} \quad k_{g,n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$
   Commenter l'expression du champ, à x fixé d'une part et à z fixé d'autre part.
3. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
4. Calculer le champ magnétique $\underline{\vec{B}_n}$ en justifiant la nécessité de revenir aux équations de Maxwell pour ce calcul. Vérifier que la forme proposée vérifie les conditions aux limites.
5. Calculer la puissance moyenne temporelle du vecteur Poynting et montrer que
   $$< \vec{\Pi} > = \frac{A_{0,n}^2 k_{g,n}}{2\mu_0\omega}\sin^2(\frac{n\pi x}{a})\vec{u}_z$$
   Commenter cette expression En déduire que
   $$< P > = \frac{A_{0,n}^2 k_{g,n} a.b}{4\mu_0\omega}$$
   Commenter.
6. Montrer que l'énergie électromagnétique moyenne par unité de longueur du guide est
   $$< \frac{dU_{em}}{dz} > = \frac{\epsilon_0 A_{0,n}^2 ab}{4}$$
7. Déduire des deux expressions ci avant la vitesse de propagation de l'énergie v_e
8. Réinterpréter l'expression de $\underline{\vec{E}_n}$ comme une superposition de deux OPPH.
   $$\underline{\vec{E}_n} = -\frac{jA_{0,n}}{2}\exp(j\omega t - jk_{g,n}z - j\frac{n\pi}{a}x)\vec{u}_y + \frac{jA_{0,n}}{2}\exp(j\omega t - jk_{g,n}z + j\frac{n\pi}{a}x)\vec{u}_y$$
   Réinterpréter alors la forme de $\underline{\vec{B}_n}$

1.3 L'effet de peau : électromagnétisme dans les métaux.

On s'intéresse à un conducteur pour lequel la loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

1. Etude de la densité volumique de charge ρ du conducteur.
   Montrer à partir de l'équation de conservation de la charge que ρ est solution de l'équation :
   $$\frac{\sigma}{\epsilon_0}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$
   Sachant que $\sigma \simeq 10^8 S.m^{-1}$, calculer un ordre de grandeur des variations temporelles de ρ. Sachant que l'on s'intéresse à des fréquences $< 10^{16} Hz$, justifier que l'on peut considérer $\rho = 0$. Ce résultat est général : un conducteur est localement neutre.
2. Montrer dans l'équation de Maxwell $\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ que le terme $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant le terme $\mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$.
   Les équations de Maxwell sont alors les mêmes que dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires.
3. Montrer à partir des équations de Maxwell dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires que l'équation de propagation est
   $$\vec{\Delta}\vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
4. Cette équation est une équation de diffusion. Donner alors la dimension du coeffocient D et une première estimation de l'épaisseur de peau.
5. On suppose alors que le métal occupe tout le demi espace $z > 0$, l'espace $z < 0$ étant occupé par l'air assimilé à du vide. La solution cherchée est de la forme $\vec{E} = E(z,t)\vec{u}_x$
   Montrer que la relation de dispersion est la suivante
   $$k^2 = -j\mu_0 \sigma \omega$$
6. En utilisant le fait que $-j = \frac{(1-j)^2}{2}$, trouver l'expression de $k(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$. En déduire la forme de $\vec{E}$ et conclure quand à l'épaisseur de peau.
7. Calculer le champ magnétique résultant.

1.4 Problème de révision : ondes électromagnétiques dans les plasmas.

Un plasma d'hydrogène est un milieu assimilé à un gaz où les atomes d'hydrogène sont totalement ionisés, donc le plasma est constitué d'électron $(-e, m_e)$ et de proton (e, m_p). Au repos, en l'absence de perturbation, le plasma est localement neutre : il y a n_0 électrons par unité de volume et n_0 protons par unité de volume.

1.4.1 Onde longitudinale dans les plasmas

On étudie dans cette partie l'effet d'une onde électromagnétique $\vec{E}_1 = E_1(x,t)\vec{u}_x = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{u}_x$, $\vec{B}_1$.
Cette onde met en mouvement les charges et on note $\vec{v}_e = \vec{v}_{1,e}(x,t)\vec{u}_x$ la vitesse des électrons et $\vec{v}_p = \vec{v}_{1,p}(x,t)\vec{u}_x$ celles des protons.
De plus, cette onde modifie la répartition spatiaux-temporelle des charges de telle sorte que le nombre de charges par unité de volume en présence de l'onde s'écrit pour les électrons $n_e = n_0 + n_{1,e}(x,t)$ et de manière similaire pour les protons $n_p = n_0 + n_{1,p}(x,t)$.
Tous les champs d'ordre 1 introduits sont des infiniments petits du même ordre et on se limite à l'ordre 1 en cet infiniment petit.

1. Justifier l'appellation onde plane et longitudinale.
2. Montrer que $\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = \vec{0}$. En déduire $\vec{B}_1 = \vec{0}$
3. Calculer la densité de courant volumique $\vec{j}$. En déduire avec l'équation de conservation de la charge que
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{n_0 e}{\epsilon_0}(v_{1,p} - v_{1,e})$$
4. En appliquant la seconde loi de Newton a un électron, montrer que
$$\frac{\partial v_{1,e}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}E_1(x,t)$$
5. Faire de même avec les protons et montrer qu'alors $v_{1,p} << v_{1,e}$.
6. Montrer alors que la relation de dispersion est
$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}$$
Commenter le comportement du plasma.
7. Calculer le vecteur de Poynting, et l'énergie moyenne volumique, et les pertes par effet joule en valeur moyenne.
($\vec{\Pi} = \vec{0}$, $< U_{em} >= \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4}$ et $< \vec{j}.\vec{E} >= \vec{0}$

1.4.2 Onde transversale dans les plasmas

On étudie dans cette partie l'effet d'une onde électromagnétique $\vec{E}_1 = E_1(x,t)\vec{u}_x = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$, $\vec{B}_1$.
Cette onde met en mouvement les charges et on note $\vec{v}_e = \vec{v}_{1,e}(x,t)\vec{u}_x$ la vitesse des électrons et $\vec{v}_p = \vec{v}_{1,p}(x,t)\vec{u}_x \simeq 0$ puisque comme dans la partie précédente la vitesse des protons peut être négligé devant celle des électrons.
De plus, cette onde modifie a prioro la répartition spatiaux-temporelle des charges de telle sorte que le nombre de charges par unité de volume en présence de l'onde s'écrit pour les électrons $n_e =$

$n_0 + n_{1,e}(x,t)$.
Tous les champs d'ordre 1 introduits sont des infiniments petits du même ordre et on se limite à l'ordre 1 en cet infiniment petit.

1. Montrer que le plasma reste localement neutre à partir des équations de Maxwell, soit $n_{1,e} = 0$ (la répartition de charge reste uniforme, n_0)
2. Montrer que
$$\vec{B}_1 = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$$
3. En justifiant brièvement que l'on peut négliger la force magnétique devant la force électrique, étudier le mouvement de l'électron.
En déduire que la conductivité complexe du plasma :
$$\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma \vec{E}} \text{ avec } \underline{\sigma} = \frac{n_0 e^2}{j m_e \omega}$$
Qu'en déduire pour la puissance dissipée par effet Joule (puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge) ?
($< \vec{j}.\vec{E} >= \vec{0}$)
4. Montrer que la relation de dispersion est
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e}$$
5. Pour qu'une onde progressive puisse exister, montrer qu'il faut que
$$\omega > \omega_C = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}}$$
6. Calculer alors la vitesse de phase et de groupe en fonction de ω et ω_C. Commenter.
($v_{varphi} = c\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_c^2}}$ et $v_g = c\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$)
7. Interpréter le comportement haute fréquence.
(A trop haute fréquence, l'inertie des e^- les empêchent de bouger et le milieu se comporte alors comme le vide)

Les ondes radio modulées en amplitude (AM) ont une fréquence inférieure à la fréquence de coupure de la ionosphère. Ces ondes sont donc totalement réfléchie par la ionosphère et ainsi il est possible d'entre radio Londres de France (La propagation en ligne droite ne suffisant pas.) Par contre, pour la FM, qui utilise des fréquences plus élevées supérieures à la fréquence de coupure, les onde traversent la ionosphère ce qui limite la portée de ces ondes...

1.5 Problème de révision : onde sonore sphérique.

Une sphère pulsante de centre O a un rayon $a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$. Cette onde émet une onde sonore tel que $a_1 << a_0 << \lambda$.

1. A partir des symétries du problème, justifier qu'en coordonnées sphériques, l'onde sonore va être décrit par des champ de la forme suivante :
   Pour la pression, $p_1(M,t) = p_1(r,t)$
   Pour la vitesse, $\vec{v}_1(M,t) = v_1(r,t)\vec{u}_r$
2. Rappeler sans démonstration l'équation de d'Alembert dont est solution la pression p_1.

   Pour un champ scalaire $f(r,t)$ ne dépendant ni de θ, ni de φ en coordonnées sphériques, le Laplacien est $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r.f}{\partial r^2}$
3. Justifier alors que le champ de pression sonore peut s'écrire $p_1(r,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - k.r - \alpha)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$.
4. Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}_1$.
   Montrer qu'en champ proche, pour $r << \lambda$, $\vec{v}_1(r,t) = \frac{A}{\mu_0 \omega r^2}\sin(\omega t - k.r - \alpha)$
   Montrer que dans la zone de rayonnement, pour $r >> \lambda$, $\vec{v}_1(r,t) = \frac{k.A}{\mu_0 \omega r}\cos(\omega t - k.r - \alpha)$
5. Justifier que la condition au limite sur la sphère peut s'écrire $v_1(r = a_0, t) = \dot{a}$. En déduire A et α.
   ($A = \mu_0 \omega^2 a_0^2 a_1$ et $\alpha = \pi - k a_0$)
6. Calculer la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon $r >> \lambda$. Commenter alors la dépendance en $\frac{1}{r}$ des champs dans la zone de rayonnement. Un son aigu est il mieux rendu ou moins bien rendu qu'un son grave par ce "haut-parleur".
   ($< P >= \frac{2\pi \mu_0 \omega^4 a_0^4 a_1^2}{c}$, les sons aigus sont mieux rendus. Pour palier ce problème dans les enceintes de bonne qualité, une partie spéciale est conçue pour mieux rendre les graves)

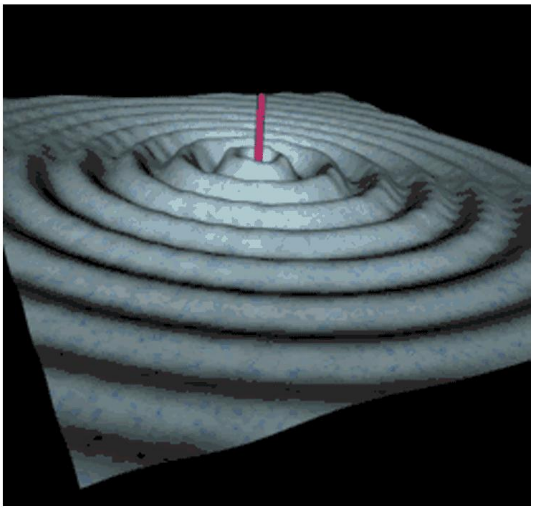

Figure 1.2 – Onde sphérique à deux dimensions. (La boucle est bouclée)