

# Onde Mécanique. Agrégation

Ph. Ribière      [ribierep@orange.fr](mailto:ribierep@orange.fr)

Samedi 26 novembre 2011

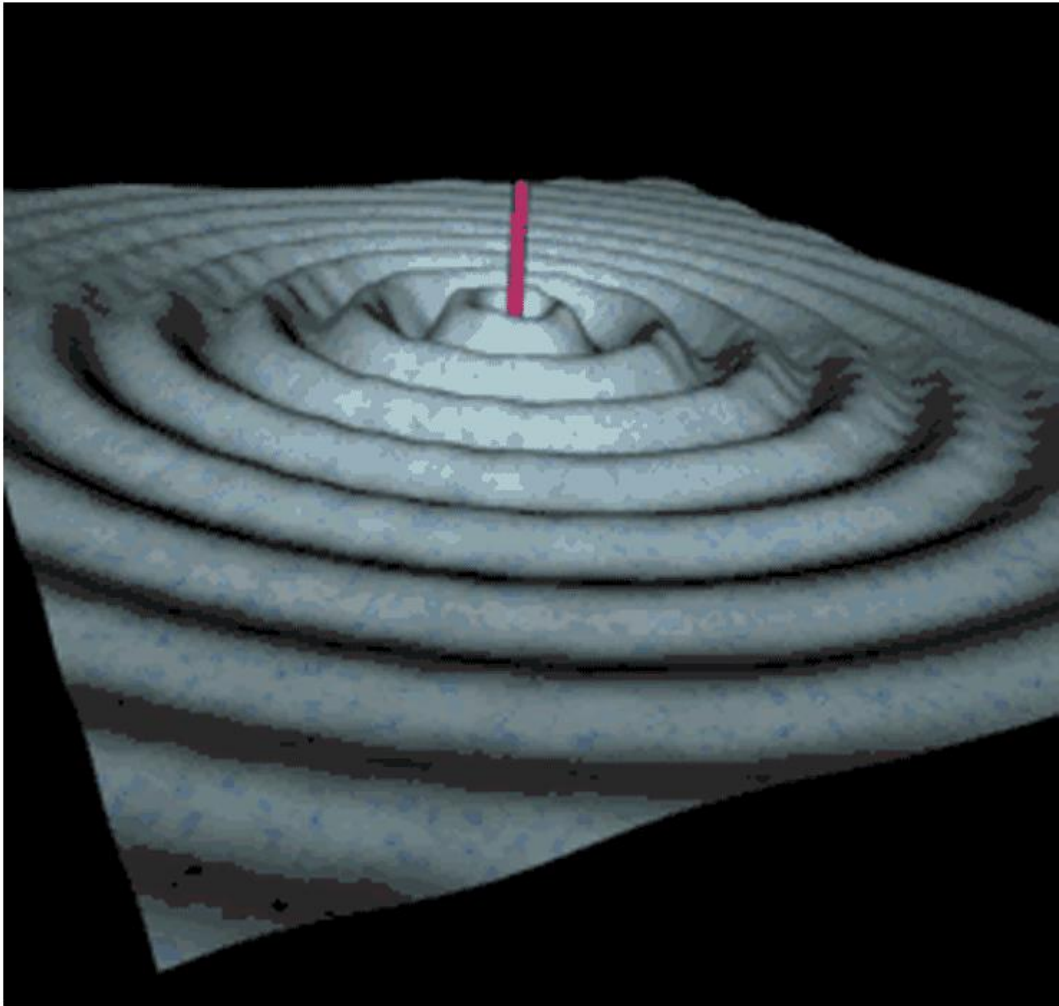


FIGURE 1 – Onde sphérique

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Onde mécanique. Introduction à l'équation de d'Alembert.</b>	<b>5</b>
1.1	Chaîne infinie d'atome : onde longitudinale. . . . .	5
1.2	La corde vibrante ou corde de Melde. . . . .	6
1.2.1	Etude théorique. . . . .	6
1.2.2	Etude expérimentale. . . . .	10
1.3	Modèle du câble coaxial. . . . .	10
<b>2</b>	<b>Dispersion et absorbtion.</b>	<b>13</b>
2.1	Relation de dispersion : dispersion et absorption. . . . .	13
2.1.1	Relation de dispersion . . . . .	13
2.1.2	Absorption. . . . .	13
2.1.3	Dispersion : vitesse de phase et vitesse de groupe. . . . .	14
2.1.4	la vitesse de phase. . . . .	14
2.2	Chaîne infinie de pendule de torsion. . . . .	16
2.3	La ligne bifilaire réelle. . . . .	17
<b>3</b>	<b>Les ondes sonores dans les fluides.</b>	<b>19</b>
3.1	Equation de propagation des ondes sonores. . . . .	19
3.1.1	Position du problème. . . . .	19
3.1.2	Mise en équation du problème. . . . .	19
3.2	Aspect énergétique. . . . .	21
3.2.1	Equation de conservation de l'énergie. . . . .	21
3.2.2	Intensité sonore et décibel acoustique . . . . .	22
3.2.3	Expression pour une Onde Plane Progressive Harmonique. . . . .	22
3.2.4	Expression pour une onde plane stationnaire. . . . .	23
3.3	Réflexion et transmission d'une onde sonore à une interface sous incidence normale. . . . .	23
3.4	Expériences . . . . .	24
3.4.1	Expériences avec les émetteurs récepteurs à ultrason. . . . .	24
3.4.2	Tube de Kundt. . . . .	26
3.5	onde sonore sphérique. . . . .	26
3.6	Dispersion des ondes sonores. . . . .	27



# Chapitre 1

## Onde mécanique. Introduction à l'équation de d'Alembert.

### 1.1 Chaîne infinie d'atome : onde longitudinale.

On considère une chaîne infinie d'atomes de masse  $m$ , séparés par des ressorts de longueur à vide  $d$  et de raideur  $k$ . La distance entre les atomes au repos est  $d$  et le déplacement du  $n^{\text{ième}}$  atome par rapport à la position d'équilibre est noté  $\xi_n(t)$ .

Ce modèle permet d'étudier la propagation d'une onde sonore (ou de toute onde de compression, comme les ondes sismiques P) dans un solide.

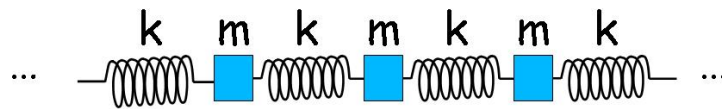


FIGURE 1.1 – Chaîne infinie d'atomes, modèle de la propagation du son dans les solides.

1. Justifier le modèle adopté du ressort pour les interactions entre atomes.

2. Montrer que l'équation vérifiée par  $\xi_n(t)$  est

$$\frac{d^2\xi_n}{dt^2} = -k(2\xi_n - \xi_{n+1} - \xi_{n-1})$$

3. Faire l'approximation des milieux continus.

La distance entre deux atomes dans un cristal est de l'ordre de  $10^{-10}$ m, distance très inférieure au longueur d'onde étudiée.

D'où l'on définit une fonction  $\xi(x, t)$  de l'espace et du temps par la relation suivante  $\xi(x = nd, t) = \xi_n(t)$ .

Montrer alors que l'équation ci dessus devient :

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -k(2\xi(x, t) - \xi(x + d, t) - \xi(x - d, t))$$

4. Faire un développement limité de  $\xi(x + d, t)$  et  $\xi(x - d, t)$  à l'ordre 2 (en justifiant la nécessité de faire le DL à cet ordre.)

5. En déduire alors l'équation de propagation de  $\xi(x, t)$  :

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{kd^2}{m}$$

6. Quelle est la dimension de c dans cette équation ?

7. Avec  $K \simeq 10 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $m \simeq 10^{-26} \text{ kg}$  et  $d \simeq 10^{-10} \text{ m}$ , estimer c et commenter.

8. Justifier le nom d'ondes longitudinales donné aux solutions de cette équations.

On cherche des solutions de la forme  $\xi(x, t) = A \cos(\omega.t - k.x)$ .

9. Justifier le nom d'onde plane progressive harmonique donnée à cette solution et le choix fait d'une telle solution.

10. Retrouver alors le lien entre  $\omega$  et  $k$ , appelé relation de dispersion.

11. En déduire la vitesse de propagation de l'onde et justifier que ce milieu est alors non dispersif.

## 1.2 La corde vibrante ou corde de Melde.

### 1.2.1 Etude théorique.

On étudie le dispositif expérimental de Melde. Cette corde est supposée inextensible, de longueur L, de masse linéique  $\mu$ . Elle est tendue à l'aide d'une masse M accrochée à la corde via une poulie et excitée par un vibreur à son autre extrémité. On appelle  $y(x, t)$  le déplacement transversale d'un morceau de la corde de Melde situé en x à l'instant t.

Pour cette étude, deux hypothèses sont nécessaires.

1. On négligera le déplacement de la corde suivant l'axe des x, tant et si bien que un point de la corde situé en  $(x, 0)$  à l'équilibre se retrouve en  $(x, y(x, t))$  lors de la vibration de la corde.

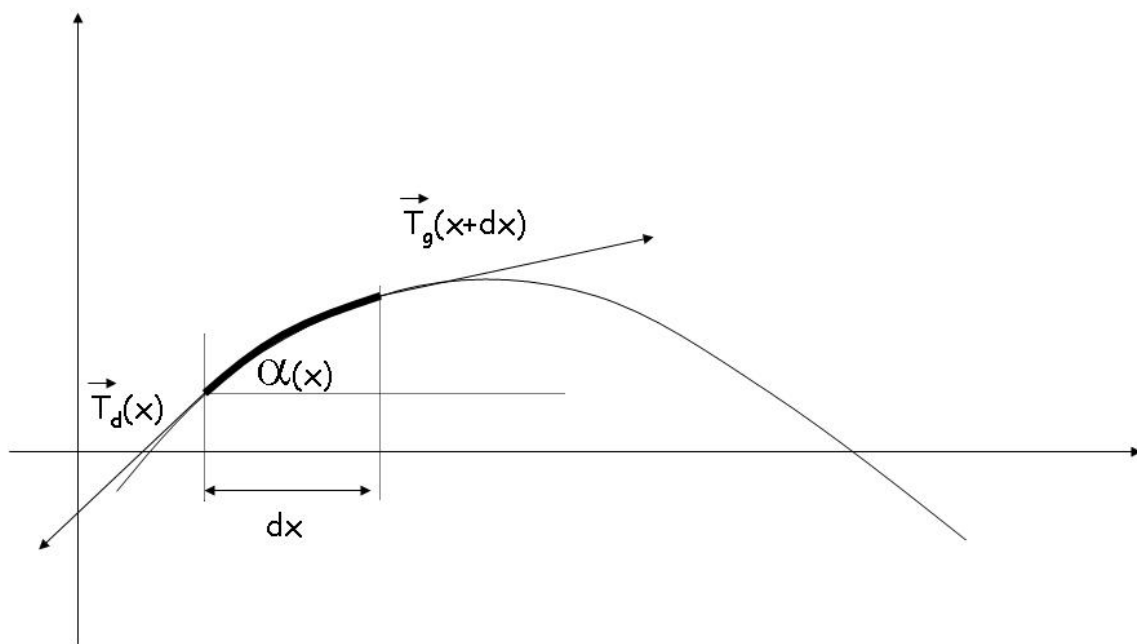


FIGURE 1.2 – Etude de la corde vibrante de Melde.

2. On supposera le déplacement de la corde faible de manière à ce que l'angle  $\alpha(x, t)$  de la corde avec l'horizontal est faible et donc on se limite à ordre 1 dans les DL en cet infiniment petit.

Remarque : ces deux hypothèses sont cohérentes entre elles et même ne pourrait en former qu'une...

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un élément infinitésimal  $dx$  de la corde, montrer que :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{T}_g(x, t) + \vec{T}_d(x + dx, t)$$

2. En projetant sur les axes et en indiquant clairement où les hypothèses faites sont utilisées, montrer que  $y(x, t)$  vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

appelée équation de d'Alembert, avec

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

3. Montrer alors la relation de dispersion est  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ .
4. Les conditions aux limites pour la corde sont les suivantes :

$$y(x = 0, t) = a \cos(\omega t)$$

et

$$y(x = L, t) = 0$$

Justifiez brièvement ces conditions aux limites.

5. Pour répondre à ces conditions aux limites, la solution proposée est de la forme

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - \phi) \cos(kx - \psi)$$

Comment ce nomme ce type de solution ? Justifiez le choix d'une pareille solution.

6. Montrez que la solution s'écrit

$$y(x, t) = \frac{a}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \sin(kL - kx)$$

7. Que se passe-t-il lorsque  $\omega = \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$  ? Comment se nomme se phénomène ?
8. Interpréter en décomposant la solution stationnaire proposée comme la somme de deux ondes planes progressives harmoniques et commenter.
9. La divergence observée ci dessus est-elle physique ? Que se passe-t-il réellement ?



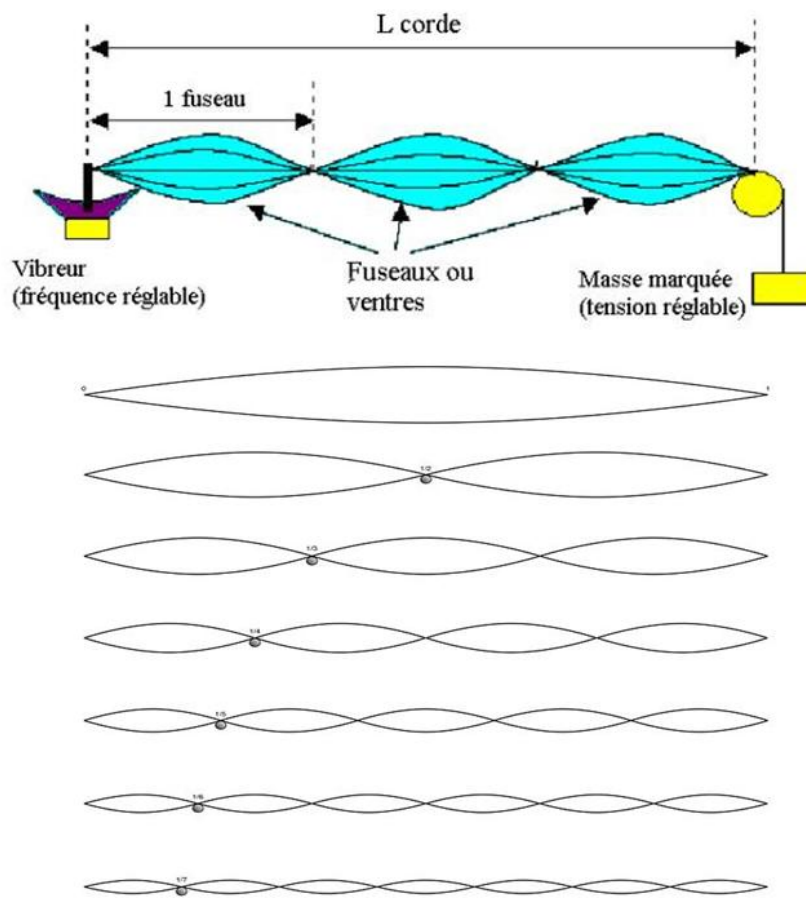


FIGURE 1.3 – Etude des ondes stationnaires dans la corde vibrante.

### 1.2.2 Etude expérimentale.

1. Estimer dans un premier temps la vitesse  $c$  des ondes dans la corde à partir du résultat de la question 1.
2. Pour une longueur  $L_a$  de la corde, chercher expérimentalement les fréquences donnant lieu à une résonance. Commenter la précision du résultat. Tracer ces points sur l'ordinateur. En déduire la vitesse  $C$  des ondes dans la corde. Comparer à votre estimation.
3. Recommencer ces mesures en faisant varier la longueur  $L$  de la corde.  $L = L_b$ . Commenter la concordance des résultats.
4. Faire varier la tension du fil (donc la masse qui tend la corde). Mesurer à nouveau la vitesse de la corde et vérifier avec les prédictions théoriques.

### 1.3 Modèle du câble coaxial.

Une tranche infinitésimale  $dx$  d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance  $l \cdot dx$  et d'une capacité  $\gamma dx$ .

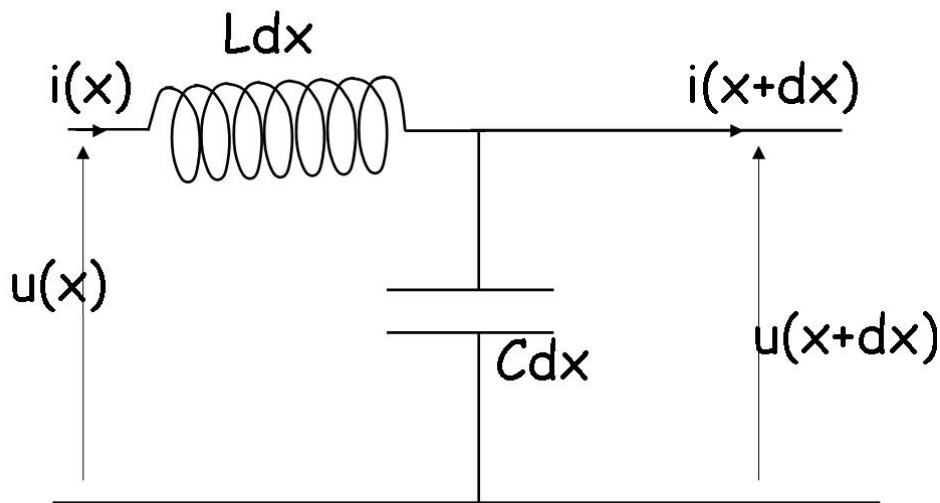


FIGURE 1.4 – Modèle d'une tranche  $dx$  de câble coaxial idéal .

1. Rappeler pourquoi il est possible de travailler sur la tranche d'épaisseur  $dx$  dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) alors que le phénomène étudié est un phénomène de propagation.

2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $u(x,t)$  et  $i(x,t)$ .
3. Montrer que  $u(x,t)$  et  $i(x,t)$  sont solutions d'équations de d'Alembert. Quelle est la vitesse de propagation des ondes ?
4. Etablir la relation de dispersion pour une OPPH.
5. Pour une OPPH selon  $+\vec{u}_x$ , montrer que le rapport  $\frac{u}{i}$  est lié à une caractéristique de la ligne.
6. Dans le cas où cette ligne est semi infinie, fermée en  $x = 0$  par un court circuit et qu'une OPPH incidente selon  $+\vec{u}_x$   $u_i(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$  est émise, calculer  $v(x,t)$  et  $i(x,t)$ .  
(Il faut donc supposer l'existence d'une onde réfléchie et chercher les conditions aux limites, on montre alors que  $v(x,t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$ )



# Chapitre 2

## Dispersion et absorption.

### 2.1 Relation de dispersion : dispersion et absorption.

#### 2.1.1 Relation de dispersion

Une fois l'équation de propagation trouvée, nous l'avons vu, il est commode de chercher la forme des solutions sous forme d'une OPPH en complexe de la forme  $A_0 \cdot \exp(j\omega t - j\vec{k} \cdot \vec{r})$ . En injectant cette forme dans l'équation de propagation, on trouve l'équation liant  $k$  et  $\omega$ . Cette équation s'appelle **relation de dispersion**.

Si l'équation de propagation n'est pas une équation de d'Alembert, alors  $k$  est complexe en supposant  $\omega$  réel (on impose un signal sinusoïdal dans le temps comme excitation). La solution est alors appelée pseudo OPPH souvent notée OPPH\*.

Pour dégager le contenu physique de la relation de dispersion, posons donc  $k(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$ .

Pour dégager le sens physique de  $k'$  et  $k''$ , il faut revenir à l'onde en réel.

$$a(x, t) = \text{Re}(\underline{a}(x, t)) = A_0 \exp(k'' \cdot x) \cos(\omega \cdot t - k' \cdot x)$$

#### 2.1.2 Absorption.

Le fait que  $k$  possède une partie imaginaire donne naissance à un terme réel, caractéristique d'un amortissement  $k'' < 0$  (le cas de l'amplification est rare sauf dans les lasers  $k'' > 0$ ). Le milieu est alors dit **absorbant** et l'absorption s'effectue sur une distance caractéristique

$$d = \frac{1}{|k''|}$$

Au delà d'une distance de quelques  $d$ , l'onde ne se fait plus sentir.

### 2.1.3 Dispersion : vitesse de phase et vitesse de groupe.

#### 2.1.4 la vitesse de phase.

La phase  $\varphi(t) = \omega t - k'x$  se propage à la vitesse de phase  $v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)}$ . ( $\varphi(t) = \omega t - k'x = \omega(t - \frac{x}{v_\varphi})$ ).

Cette vitesse de phase dépend a priori de la pulsation  $\omega$  de l'onde étudiée, tant et si bien que deux ondes de pulsations différentes n'ont pas la même vitesse de propagation. Les ondes de pulsation différentes sont donc dispersées. Le milieu est dit **dispersif**.

Pour bien comprendre le phénomène de dispersion, il ne faut donc pas se contenter d'étudier une seule OPPH\* mais une superposition d'OPPH\* appelée **paquet d'onde**.

#### le paquet d'onde.

Pour étudier un problème d'onde dont l'équation de propagation est linéaire à coefficient constant, il faut procéder comme tel :

1. utiliser la décomposition en harmonique de l'excitation  $\underline{a}(x = 0, t) = \sum_\omega \hat{a}(\omega) \exp(j\omega t)$  (La somme peut être une somme continue i.e. une intégrale)
2. étudier la propagation de chacune des composantes
3. en déduire alors la déformation du signal

Etudions donc la propagation du paquet d'onde.

Lors de la propagation du signal, chaque composante  $\hat{a}(\omega) \exp(j\omega t)$  devient  $\hat{a}(\omega) \exp(j\omega t - jk'(\omega)x)$ . Le signal global est alors la superposition de toutes les composantes que l'on nomme paquet d'onde.

$$\underline{a}(x, t) = \sum_\omega \hat{a}(\omega) \exp(j\omega t - jk'(\omega)x)$$

Pour extraire de l'information du signal, on va supposer que toutes les ondes qui composent le paquet d'onde ont une pulsation voisine d'une pulsation moyenne  $\omega_0$  et donc nous allons faire un Développement Limité au voisinage de  $\omega_0$  :

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0) = \omega_0 + \delta\omega$$

$$k'(\omega) = k'(\omega_0) + \left(\frac{dk'}{d\omega}\right)_{\omega_0}(\omega - \omega_0) = k'_0 + \left(\frac{dk'}{d\omega}\right)_{\omega_0}\delta\omega$$

On remplaçant dans les expressions, il vient :

$$\underline{a}(x, t) = \sum_\omega \hat{a}(\omega) \exp(j(\omega_0 + \delta\omega)t - j(k'_0 + \left(\frac{dk'}{d\omega}\right)_{\omega_0}\delta\omega)x)$$

Soit, en sortant de la somme les terme devenu indépendant de  $\omega$  :

$$\underline{a}(x, t) = \exp(j\omega_0 t - jk'_0 x) \sum_\omega \hat{a}(\omega) \exp(j\delta\omega t - j\left(\frac{dk'}{d\omega}\right)_{\omega_0}\delta\omega x)$$

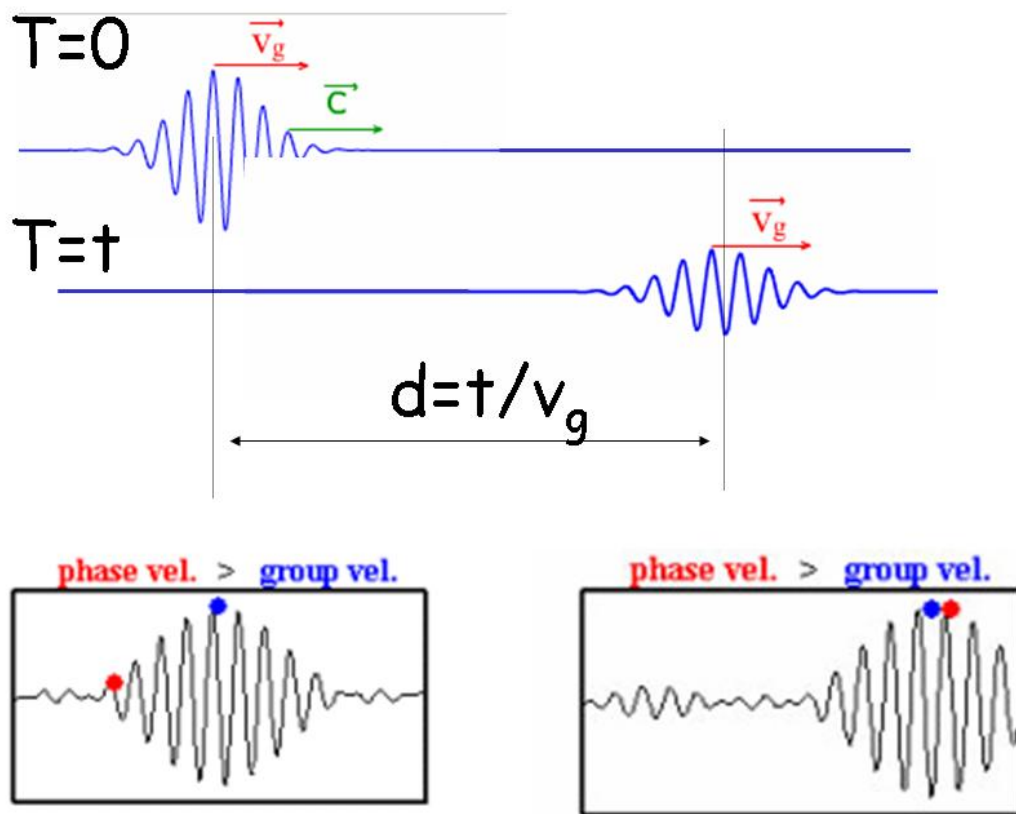


FIGURE 2.1 – Déformation du paquet d'onde dans un milieu dispersif.

Le premier terme  $\exp(j\omega_0 t - jk'_0 x)$  désigne la propagation de l'onde moyenne alors que  $\sum_{\omega} \hat{a}(\omega) \exp(j\delta\omega(t - \frac{dk'}{d\omega})_0 x)$  désigne la propagation de l'enveloppe du signal, dont la vitesse de propagation est la **vitesse de groupe** :

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk'} \right)_{\omega_0}$$

La vitesse de phase diffère donc de la vitesse de groupe, ce qui fait que le paquet d'onde se déforme en se propageant. Tel est la caractéristique d'un phénomène dispersif.

## 2.2 Chaîne infinie de pendule de torsion.

Considérons une chaîne de pendule couplé. Chaque pendule est une barre homogène de masse  $m$  et de longueur  $l$  et de moment d'inertie  $J = \frac{m.l^2}{3}$  autour de l'axe  $Oz$ . Le couplage de l'oscillateur s'effectue par un fil de torsion, confondu avec l'axe  $Oz$  de constante de raideur  $K$ . L'oscillation du  $n$ -ième pendule s'effectue dans le plan  $O_n xy$  et  $O_n$  est de coordonnée  $z_n = nd$ . Outre le couple de rappel du au fil de torsion déjà évoqué, chaque oscillateur est soumis à un couple de frottement fluide  $-f.\dot{\theta}_n$ .

1. Montrer que  $\theta_n(t)$  vérifie l'équation :

$$\frac{m.l^2}{3} \ddot{\theta}_n = -K(\theta_n - \theta_{n+1}) - K(\theta_n - \theta_{n-1}) - \frac{mgl}{2} \sin(\theta_n) - f.\dot{\theta}_n$$

2. En faisant l'approximation des milieux continus, montrer que

$$\frac{m.l^2}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = K d^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{mgl}{2} \sin(\theta) - f \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

3. Linéariser cette équation pour les petits mouvements.
4. Chercher les solutions sous formes de pseudo-onde plane progressive harmonique :

$$\theta(t) = \text{Re}(\underline{\theta}(t)) \text{ avec } \underline{\theta}(t) = \underline{A} \exp(j\omega t - jkx)$$

$\omega$  est un réel mais  $k$  est *a priori* complexe :  $k(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$

Montrer alors que la relation de dispersion est

$$k^2 = \frac{ml^2 \omega^2}{3Kd^2} - \frac{mgl}{2Kd^2} - \frac{jf\omega}{Kd^2}$$

5. Etude du cas très haute fréquence.

En supposant la fréquence très élevée, simplifier la relation de dispersion. Commenter.

6. Etude du cas haute fréquence.

En supposant la fréquence élevée, simplifier la relation de dispersion en gardant un terme de plus que précédemment. A l'aide d'un développement limité, calculer  $k(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$ .

Montrer que  $k'(\omega) = \pm \sqrt{\frac{ml^2}{3Kd^2}}$  et  $k''(\omega) = -\pm f \cdot \sqrt{\frac{3}{4ml^2 K d^2}}$

En déduire la vitesse de phase et la vitesse de groupe, commenter l'intérêt d'un tel cas.



7. Etude du cas où les frottements sont négligeables.  
 Dans ce cas, l'équation est appelée équation de Klein Gordon.  
 En posant  $c = \sqrt{\frac{3Kd^2}{ml^2}}$  et  $\omega_C = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ , montrer que :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_C^2}{c^2}$$

Etudier d'abord le cas  $\omega > \omega_C$ , calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Que dire de l'absorption ?

Etudier ensuite le cas  $\omega < \omega_C$ .

### 2.3 La ligne bifilaire réelle.

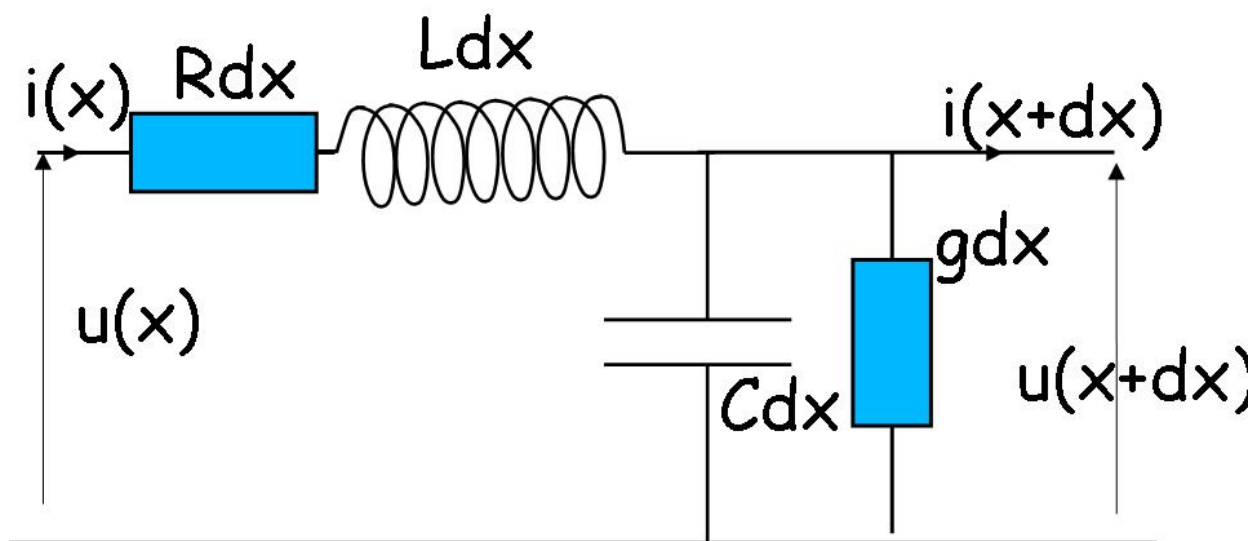


FIGURE 2.2 – Modèle d'une tranche  $dx$  d'un câble coaxial réel.

Une tranche infinitésimale  $dx$  d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance  $l \cdot dx$  et

d'une capacité  $\gamma dx$ . Pour rendre compte des imperfections de la ligne bifilaire, il faut ajouter en série une résistance  $r dx$  à l'inductance et une conductance  $g dx$  en parallèle du condensateur.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $u(x,t)$  et  $i(x,t)$ .
2. Etablir la relation de dispersion pour une pseudo onde plane progressive harmonique OPPH\*. Montrer qu'elle est de la forme  $k^2 = \omega^2 l \gamma - j \omega (l g + r \gamma) - r g$ . Commenter cette expression dans le cas où  $r = 0$  et  $g = 0$ .
3. Calculer la vitesse de phase, la vitesse de groupe ainsi qu'une distance caractéristique de l'amortissement.
4. Montrer que pour un choix judicieux de  $r$  et  $g$ , la vitesse de phase et l'amortissement sont indépendants de  $\omega$ . Justifier l'intérêt de ce choix.

# Chapitre 3

## Les ondes sonores dans les fluides.

### 3.1 Equation de propagation des ondes sonores.

#### 3.1.1 Position du problème.

Dans un fluide au repos, le champ de vitesse d'une particule du fluide  $\vec{v}(M, t) = \vec{0}$  (même si les molécules ont une vitesse, comme le mouvement est désordonné, en moyenne, la vitesse est bien nulle) la pression est uniforme  $p_0$  (sur des échelles pas trop grandes en  $z$  tout du moins) et la masse volumique aussi  $\mu_0$ .

En présence d'une onde sonore, il apparaît un mouvement ordonné des particules  $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$ , champ de vitesse eulérien qui dépend de l'espace et du temps, une pression acoustique  $p_1(\vec{r}, t)$  (soit une pression totale  $p_{tot} = p_0 + p_1(\vec{r}, t)$ , le pression fluctue donc autour de la valeur moyenne  $p_0$  qui est la valeur à l'équilibre) et une fluctuation de la masse volumique  $p_1(\vec{r}, t)$  (soit une masse volumique totale  $\mu_{tot} = \mu_0 + \mu_1(\vec{r}, t)$ ).

L'étude va s'effectuer dans le cadre de **l'approximation acoustique**.

1. Tous les calculs s'effectuent à l'ordre 1 en chacune des fluctuations.
2. Tous les infiniments petits sont du même ordre (d'ordre 1).

Remarque : ces deux hypothèses sont cohérentes entre elles et même ne pourrait en former qu'une, comme précédemment... Ces hypothèses devront être vérifiées a posteriori.

#### 3.1.2 Mise en équation du problème.

1. Ecrire les trois équations nécessaires à l'étude des trois champs précédent (en justifiant l'importance de chacune des équations).

$$\operatorname{div}(\mu\vec{v}) + \frac{\partial\mu}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \left( \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad})\vec{v} \right) = - \operatorname{grad} p \quad (3.2)$$

$$\chi_s = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial p} \text{ soit } \frac{D\mu}{Dt} = \mu \chi_s \frac{Dp}{Dt} \quad (3.3)$$

2. En utilisant l'approximation acoustique, linéariser ces équations et montrer que l'on obtient alors les **équations couplées aux dérivées partielles du premier ordre** suivantes :

$$\mu_0 \operatorname{div}(\vec{v}_1) + \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = 0$$

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \operatorname{grad} p_1$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t}$$

Commenter alors l'approximation acoustique.

3. Obtenir l'équation de propagation de  $p_1$ , **équation découplée aux dérivées partielles du second ordre** suivantes :

$$\Delta p_1 - \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_s}$$

(Rappel d'analyse vectorielle  $\operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \Delta$  laplacien)

4. Montrer que l'écoulement est irrotationnel et obtenir l'équation de propagation de  $\vec{v}_1$ , **équation découplée aux dérivées partielles du second ordre** suivantes :

$$\Delta \vec{v}_1 - \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \vec{0}$$

(Rappel d'analyse vectorielle  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}) - \Delta$ )

5. Commenter l'expression de la vitesse des ondes (en rappelant la valeur de la vitesse du son dans l'air et dans l'eau). Montrer que dans le cas d'un gaz parfait :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

et retrouver alors la valeur de la vitesse de la lumière dans l'air à 300 K

6. Traduire l'équation de propagation pour une OPPH de la forme  $\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)$ .  
Rappel : L'OPPH permet d'utiliser la notation complexe et donc de transformer les **équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants** en des équations algébriques plus simples à manipuler.

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega \text{ et } \vec{\nabla} = j\vec{k}$$

( $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$  et tous les opérateurs vectoriels s'expriment avec  $\vec{\nabla}$ )

7. Justifier le caractère longitudinal de l'onde.

8. Revenir aux équations couplées aux dérivées partielles du premier ordre, les traduire à l'aide des OPPH. Montrer alors que pour une OPPH se déplaçant dans la direction  $\vec{u}$ , on a l'impédance acoustique

$$Z_+ = \frac{p_1}{v_1} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu}{\chi_s}}$$

Généraliser ce résultat pour une OPP.

Il est important de comprendre que les équations de propagations (équation aux dérivées partielles découplées du second ordre) ne sont que des conditions nécessaires et non pas une condition nécessaire et suffisante. En dérivant les équations, une information a été perdue, ici en l'occurrence le couplage entre  $p_1$  et  $v_1$ . Il est donc essentiel lorsque l'on souhaite décrire la structure de l'onde de donner ce couplage.

Remarque : Pour une OPPH se déplaçant dans la direction  $-\vec{u}$ , on a l'impédance acoustique  $Z_- = \frac{p_1}{v_1} = -\mu_0 c = -\sqrt{\frac{\mu}{\chi_s}}$

## 3.2 Aspect énergétique.

### 3.2.1 Equation de conservation de l'énergie.

La puissance échangée à travers une surface infinitésimale  $d\vec{S}$  par l'onde sonore est :

$$dP = d\vec{F} \cdot \vec{v} = (p_0 + p_1)d\vec{S} \cdot \vec{v}_1 = p_0 d\vec{S} \cdot \vec{v}_1 + p_1 d\vec{S} \cdot \vec{v}_1$$

Le premier terme  $p_0 d\vec{S} \cdot \vec{v}_1$  est de valeur moyenne nulle donc il est sans grand intérêt pour l'étude énergétique. Le second terme est donc celui que nous retiendrons.

$$P = \int \int_S p_1 \vec{v}_1 \cdot d\vec{S} = \int \int_S \vec{\Pi}_1 \cdot d\vec{S} \quad \text{avec } \vec{\Pi} = p_1 \vec{v}_1 \text{ vecteur densité de flux sonore}$$

Pour trouver l'équation locale de l'énergie, il faut partir des équations (1), (2) et (3).

$$\left(\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} p_1\right) \cdot \vec{v}_1$$

$$\left(\text{div} \vec{v}_1 = -\chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t}\right) \cdot p_1$$

Il vient alors une expression de l'énergie volumique en présence d'onde sonore :

$$e = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s p_1^2$$

On reconnaît un terme d'énergie cinétique et un terme d'énergie potentiel.

Et l'équation énergétique locale est :

$$\text{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

La forme intégrée (avec le théorème d'Ostrogradski) :

$$\int \int_S \vec{\Pi} d\vec{S} + \frac{d}{dt} E_{tot} = 0$$

L'interprétation de ces deux expressions est la suivante, l'énergie  $E_{tot} = \int \int \int_V e dV$  d'un volume  $V$  de fluide (délimité par une surface  $S$ ) varie du fait de la propagation de l'onde,  $\int \int_S (\vec{P} \cdot \vec{i})$  étant la puissance sonore entrant à travers la surface  $S$ . Il s'agit donc d'une équation de conservation de l'énergie.

### 3.2.2 Intensité sonore et décibel acoustique

Définition de l'intensité sonore, en décibel,

$$I = 10 \cdot \ln \left( \frac{\langle \Pi \rangle}{\langle \Pi_0 \rangle} \right) \quad \text{avec} \quad \langle \Pi_0 \rangle = 10^{-12} \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Remarque, pour  $I = 130$  dB, seuil de douleur de l'oreille, la pression acoustique est de l'ordre de 100 Pa (vous pouvez faire le calcul exacte, vous trouverez 92 Pa) et la vitesse de  $0,1 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  ( $0,21 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ). Dans les deux cas,  $p_1 \ll p_0$  et  $v_1 \ll c$ .

### 3.2.3 Expression pour une Onde Plane Progressive Harmonique.

Pour une OPPH se déplaçant dans la direction  $\vec{u}$ , il est possible de montrer les résultats suivants :

$$e_c = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 = \frac{1}{2} \chi_s p_1^2 = e_p$$

Il y a équipartition de l'énergie entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

$$\vec{\Pi} = c \cdot e \cdot \vec{u}$$

De plus la valeur moyenne temporelle de l'énergie et du vecteur densité de flux donne :

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 v_{1M}^2$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 c v_{1M}^2 \vec{u} = \langle e \rangle \cdot c \cdot \vec{u}$$

(Rappel :  $\langle \cos^2 \rangle = \langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}$ ) Pour une OPPH, l'interprétation énergétique est donc claire quand à la propagation de l'énergie.

Néanmoins, il faut être conscient que l'OPPH n'est pas véritablement adapté à l'étude énergétique puisque  $\langle e \rangle$  ne dépend pas du point de calcul donc l'intégrale triple sur tout l'espace donne  $\infty$ , ce qui n'est pas physique mais qui n'est guère surprenant puisque l'onde plane est elle aussi infinie. (Ce problème est général pour une OPPH).

### 3.2.4 Expression pour une onde plane stationnaire.

Considérons une OPPH se propageant suivant  $+\vec{u}_x$  arrivant sur un mur, situé en  $x=0$ . La condition au limite imposée par le mur est  $v_1(x=0, t) = 0 \forall t$ .

Il est alors bon de chercher la forme de la solution sous forme d'une onde stationnaire, qui vérifie la condition au limite et qui est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

$$v_1(x, t) = v_{1m} A \sin(kx) \sin(\omega t) = \frac{v_{1m}}{2} \cos(\omega t - kx) - \frac{v_{1m}}{2} \cos(\omega t + kx)$$

$v_1$  est une onde stationnaire qui admet un noeud en  $x = 0$ .

De là, il est possible de calculer  $p_1$  :

$$p_1 = \mu_0 c \frac{v_{1m}}{2} \cos(\omega t - kx) - (-\mu_0 c) \frac{v_{1m}}{2} \cos(\omega t + kx)$$

$$p_1 = \mu_0 c v_{1m} \cos(kx) \cos(\omega t)$$

$p_1$  est aussi une onde stationnaire qui admet un ventre en  $x = 0$ . Les ventres de pression sont les noeuds de vitesse et réciproquement.

Finalement,  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$

(Rappel :  $\langle \cos() \sin() \rangle = 0$ )

Conclusion, une onde stationnaire ne transporte en moyenne aucune énergie.

### 3.3 Réflexion et transmission d'une onde sonore à une interface sous incidence normale.

Considérons l'interface plane infinie située en  $x=0$  entre deux milieux, d'impédance respective  $Z'$  et  $Z''$  et une onde sonore plane arrivant sous incidence normale. Cette onde va donner naissance à une réfléchie et une onde transmise.

La vitesse dans le milieu' est donc

$$v'_1 = v_i \exp(j(\omega t - k'x)) + v_r \exp(j(\omega t + k'x))$$

, superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie (contrairement au cas précédent, l'onde est partiellement réfléchie, l'amplitude de l'onde réfléchie est donc inférieure à l'amplitude de l'onde incidente).

La vitesse dans le milieu'' est donc

$$v''_1 = v_t \exp(j(\omega t - k''x))$$

1. Montrer que le champ de pression acoustique est le suivant :

$$v'_1 = Z' \cdot v_i \exp(j(\omega t - k'x)) - Z' \cdot v_r \exp(j(\omega t + k'x))$$

$$v''_1 = Z'' \cdot v_t \exp(j(\omega t - k''x))$$

2. Montrer que les conditions aux limites à l'interface sont :

$$\text{Continuité de la vitesse à l'interface } v_1'(0, t) = v_1''(0, t)$$

$$\text{Continuité de la pression à l'interface } p_1'(0, t) = p_1''(0, t)$$

3. Montrer alors que les coefficients de réflexion et en transmission en amplitude sont :

$$r = \frac{v_r}{v_i} = \frac{Z' - Z''}{Z' + Z''}$$

$$t = \frac{v_t}{v_i} = \frac{2.Z'}{Z' + Z''}$$

4. Montrer alors que les coefficients de réflexion et en transmission en puissance sont :

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = \left( \frac{Z' - Z''}{Z' + Z''} \right)^2$$

$$t = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{4.Z'Z''}{(Z' + Z'')^2}$$

5. Commenter le cas où  $Z' \simeq Z''$ , nommer adaptation d'impédance.

Nous retiendrons qu'à une interface, les ondes sonores sont correctement transmises que si les impédances de part et d'autres sont voisines.

Par exemple, pour une vitre, l'impédance de l'air est très inférieure à l'impédance du verre. Le coefficient de transmission en puissance à travers une vitre (deux interfaces) est donc  $T^2$  très faible ( $T^4$  dans le cas d'un double vitrage).

Au contraire pour une échographie, il faut que les ondes pénètrent dans le corps, d'où la présence d'un gel pour mieux adapté l'impédance.

## 3.4 Expériences

### 3.4.1 Expériences avec les émetteurs récepteurs à ultrason.

Une fois réglé à la résonance, il est possible de faire des expériences simples avec les ultrasons. (Certains même marchent dans l'eau et permettent de faire aussi des mesures dans l'eau. Créer des ondes stationnaires, faire de la transmission d'onde ...



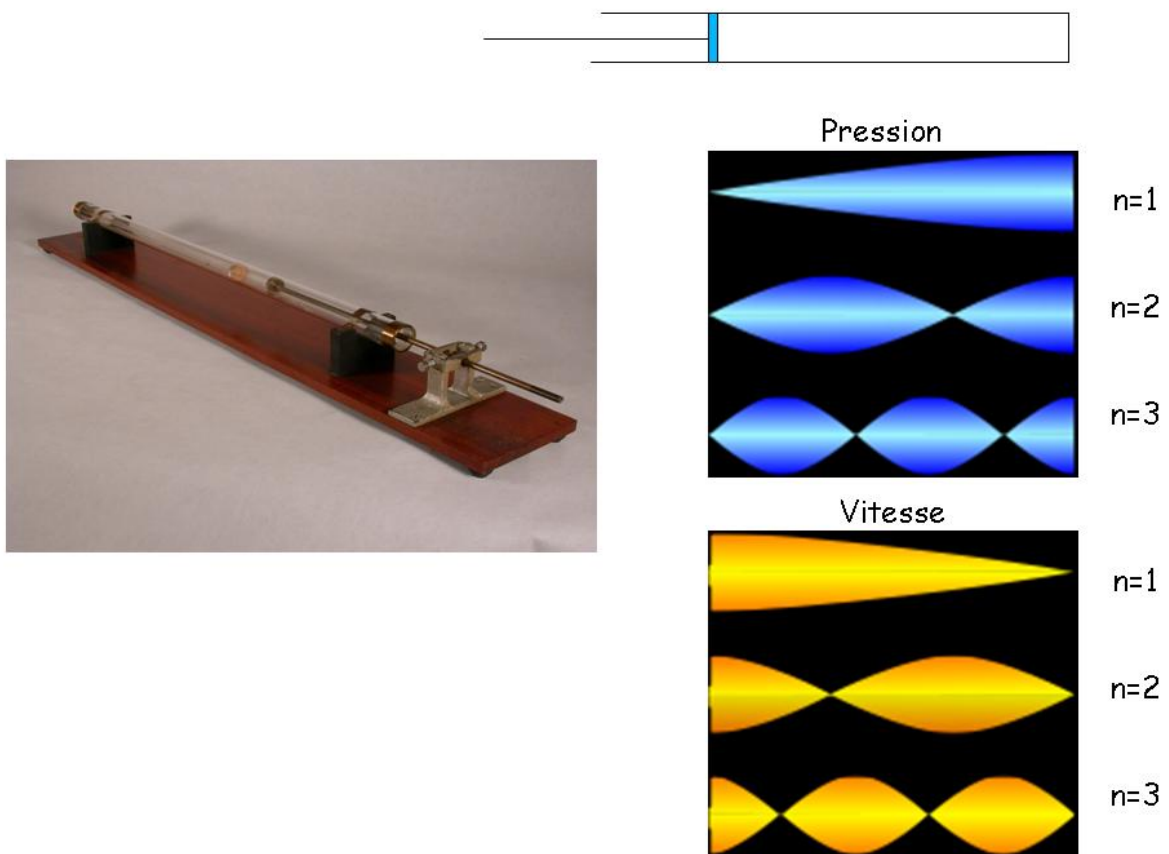


FIGURE 3.1 – Onde sonore dans le tube de Kundt.

### 3.4.2 Tube de Kundt.

Il existe un phénomène analogue à la corde vibrante de Melde en acoustique dans les tuyaux sonores, ce qu'illustre le tube de Kundt. Les extrémités du tube sont ouvertes, donc en première approximation, la pression admet en ces points un ventre, et par conséquent, un noeud de vitesse.

Les longueurs d'ondes vérifient par conséquent  $\lambda_n = \frac{L}{n}$ , soit  $f = \frac{n \cdot c}{L}$ . Il est possible de détecter le fondamental et les harmoniques en faisant la transformée de Fourier du signal.

Néanmoins, même si la précision de ces manipulations restent médiocre, il est possible de déceler une léger écart entre théorie et expérience dans la mesure où la pression n'admet pas exactement un ventre à chaque extrémité.

Vous pouvez aussi augmenter le débit dans le tube et voire l'évolution du signal (en fréquence et au décibelmètre).

Les silencieux de voiture sont eux fondés sur le processus inverse (minimiser le son de la voiture).

Autres prolongations possibles.

Il est aussi à noter que le phénomène mis en évidence ici a aussi son analogue en optique, dans le Fabry-Pérot et dans les cavités lasers.

## 3.5 onde sonore sphérique.

Une sphère pulsante de centre O a un rayon  $a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$ . Cette onde émet une onde sonore tel que  $a_1 \ll a_0 \ll \lambda$ .

1. A partir des symétries du problème, justifier qu'en coordonnées sphériques, l'onde sonore va être décrit par des champ de la forme suivante :

Pour la pression,  $p_1(M, t) = p_1(r, t)$

Pour la vitesse,  $\vec{v}_1(M, t) = v_1(r, t)\vec{u}_r$

2. Rappeler sans démonstration l'équation de d'Alembert dont est solution la pression  $p_1$ .

Pour un champ scalaire  $f(r, t)$  ne dépendant ni de  $\theta$ , ni de  $\varphi$  en coordonnées sphériques, le Laplacien est  $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \cdot f}{\partial r^2}$

3. Justifier alors que le champ de pression sonore peut s'écrire  $p_1(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - k \cdot r - \alpha)$  avec  $k = \frac{\omega}{c}$ .

4. Déterminer l'expression de la vitesse  $\vec{v}_1$ .

Montrer qu'en champ proche, pour  $r \ll \lambda$ ,  $\vec{v}_1(r, t) = \frac{A}{\mu_0 \omega r^2} \sin(\omega t - k \cdot r - \alpha)$

Montrer que dans la zone de rayonnement, pour  $r \gg \lambda$ ,  $\vec{v}_1(r, t) = \frac{k \cdot A}{\mu_0 \omega r} \cos(\omega t - k \cdot r - \alpha)$

5. Justifier que la condition au limite sur la sphère peut s'écrire  $v_1(r = a_0, t) = \dot{a}$ . En déduire  $A$  et  $\alpha$ .

( $A = \mu_0 \omega^2 a_0^2 a_1$  et  $\alpha = \pi - k a_0$ )

6. Calculer la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon  $r \gg \lambda$ . Commenter alors la dépendance en  $\frac{1}{r}$  des champs dans la zone de rayonnement. Un son aigu est-il mieux rendu ou moins bien rendu qu'un son grave par ce "haut-parleur".  
 ( $\langle P \rangle = \frac{2\pi\mu_0\omega^4 a_0^4 a_1^2}{c}$ , les sons aigus sont mieux rendus. Pour palier ce problème dans les enceintes de bonne qualité, une partie spéciale est conçue pour mieux rendre les graves)

### 3.6 Dispersion des ondes sonores.

On s'intéresse à la propagation d'une onde sonore selon l'axe Oz verticale ascendante, et on cherche à prendre en compte l'effet de la gravité sur la propagation de l'onde.

1. Etablir alors l'expression de la pression  $p_0(z)$  et  $\mu_0(z)$  en l'absence d'onde sonore dans le modèle de l'atmosphère (gaz parfait) isotherme à  $T_0$ .
2. A l'aide de l'approximation acoustique, trouver les trois équations partielles couplées linéaires dont  $p_1(z, t)$ ,  $\mu_1(z, t)$  et  $v_1(z, t)$  sont solutions.
3. Montrer alors que par élimination on trouve l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \gamma g \frac{\partial v_1}{\partial z} - \gamma \frac{g^2}{c^2} v_1$$

Commenter

4. Etablir alors la relation de dispersion.
5. Calculer  $k$  en vous appuyant sur des ordres de grandeurs réalistes.
6. Calculer l'énergie cinétique moyenne d'une particule de fluide. Commenter.

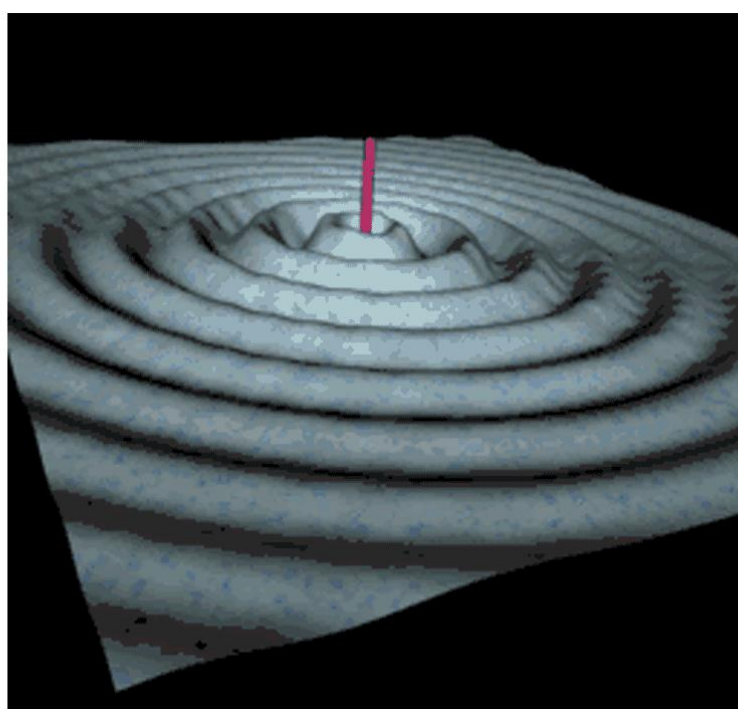


FIGURE 3.2 – Onde sphérique à deux dimension. (La boucle est bouclée)