

Onde. Agrégation

Ph. Ribière ribierep@orange.fr

Samedi 20 novembre 2010

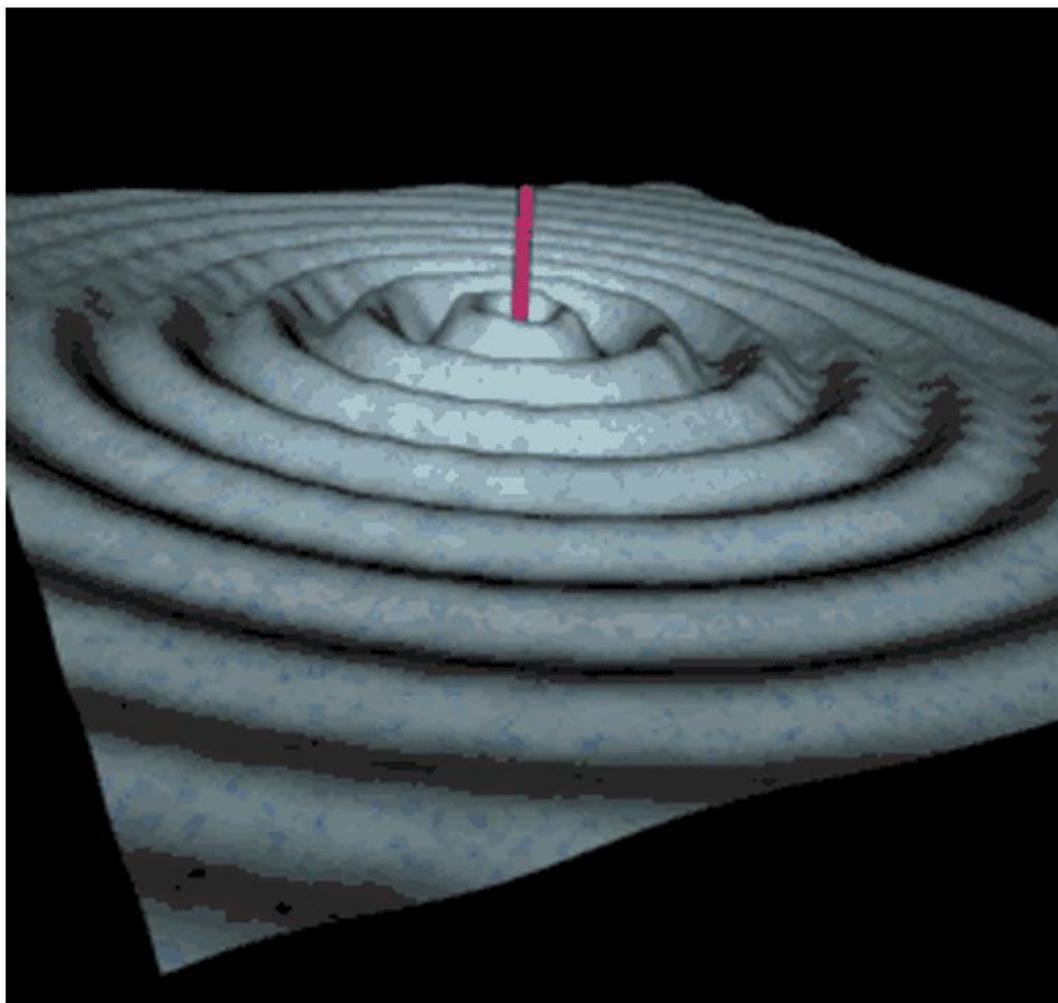


FIGURE 1 – Onde sphérique

Ce polycopié est rédigé d'une manière différente du précédent, dans la mesure où la partie physique des ondes est sans doute la partie la plus représentée au concours et que les questions débutent souvent par une reprise d'un exemple de cours. J'ai donc pris le parti de rédiger sous forme d'exercices très détaillés chacune de ces parties afin de vous incitez à refaire ces exemples (la réponse est presque toujours donné dans l'énoncé, ce qui est de ce point de vue peu réaliste pour un concours...).

Table des matières

1	Onde mécanique. Introduction à l'équation de d'Alembert.	7
1.1	Chaîne infinie d'atome : onde longitudinale.	7
1.2	Résolution de l'équation de D'Alembert.	8
1.2.1	Recherche de la solution générale.	8
1.2.2	Onde Plane Progressive Harmonique.	9
1.2.3	Onde stationnaire.	9
1.2.4	Onde progressive, onde stationnaire et détermination des constantes.	10
1.3	La corde vibrante ou corde de Melde.	10
1.3.1	Etude théorique.	10
1.3.2	Etude expérimentale.	14
1.4	Exercice : Modèle du câble coaxial.	14
2	Les ondes sonores dans les fluides.	17
2.1	Equation de propagation des ondes sonores.	17
2.1.1	Position du problème.	17
2.1.2	Mise en équation du problème.	17
2.2	Aspect énergétique.	19
2.2.1	Equation de conservation de l'énergie.	19
2.2.2	Intensité sonore et décibel acoustique	20
2.2.3	Expression pour une Onde Plane Progressive Harmonique.	20
2.2.4	Expression pour une onde plane stationnaire.	21
2.3	Réflexion et transmission d'une onde sonore à une interface sous incidence normale.	21
2.4	Expériences	22
2.4.1	Expériences avec les émetteurs récepteurs à ultrason.	22
2.4.2	Tube de Kundt.	24
3	Les ondes électromagnétiques dans le vide.	25
3.1	Equation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.	25
3.2	Rappel sur la polarisation des OPPH.	26
3.3	Aspect énergétique de la propagation des ondes électromagnétiques	27
3.4	Rayonnement dipolaire.	28
3.4.1	Présentation du modèle : dipôle oscillant dans sa zone de rayonnement.	29
3.4.2	Expression du champ rayonné.	29

3.4.3	Puissance rayonnée.	30
3.4.4	La diffusion Rayleigh et le bleu du ciel.	30
4	Dispersion et absorbtion.	33
4.1	Relation de dispersion : dispersion et absorption.	33
4.1.1	Relation de dispersion	33
4.1.2	Absorption.	33
4.1.3	Dispersion : vitesse de phase et vitesse de groupe.	34
4.1.4	la vitesse de phase.	34
4.2	La ligne bifilaire réelle.	36
4.3	Le guide d'onde : dispersion dues aux conditions aux limites.	37
4.4	L'effet de peau : électromagnétisme dans les métaux.	38
5	Problème de révision : ondes électromagnétiques dans les plasmas.	41
5.1	Onde longitudinale dans les plasmas	41
5.2	Onde transversale dans les plasmas	42
6	Problème de révision : onde sonore sphérique.	45
7	Interférences	47
7.1	Modèle scalaire de l'onde, intensité lumineuse.	48
7.2	Condition de cohérence des ondes.	48
7.3	Interféromètre à division du front d'onde.	50
7.4	Interféromètre à division d'amplitude.	53
7.4.1	La lame d'air	53
7.4.2	Présentation de l'interféromètre de Michelson.	53
7.4.3	Le Michelson en lame d'air.	56
7.4.4	Le Michelson en coin d'air.	58
7.5	Interférence à deux ondes et à N ondes.	60
7.5.1	Interférence à deux ondes.	60
7.5.2	Interférence à N ondes.	64
7.6	Interférence en lumière non monochromatique.	65
7.6.1	Résolution d'un doublet : battements optiques.	65
7.6.2	Etude en lumière blanche.	67
8	Diffraction	71
8.1	Principe de Huygens-Fresnel.	71
8.2	Interférence et diffraction, retour sur l'expérience d'Young.	76
8.3	Les réseaux.	79
9	Manipulations possibles avec le logiciel Caliens.	83
9.1	Etude de la figure de diffraction.	83
9.2	Les fentes d'Young.	83
9.3	Cohérence spatiale d'une source étendue.	84

9.4	Spectroscopie à transformée de Fourier : Etude d'un doublet de lampe spectrale. . . .	85
9.5	Etude d'un laser : faisceau gaussien.	86
9.5.1	Première expérience.	87
9.5.2	Deuxième manipulation.	88

Chapitre 1

Onde mécanique. Introduction à l'équation de d'Alembert.

1.1 Chaîne infinie d'atome : onde longitudinale.

On considère une chaîne infinie d'atomes de masse m , séparés par des ressorts de longueur à vide d et de raideur k . La distance entre les atomes au repos est d et le déplacement du $n^{\text{ième}}$ atome par rapport à la position d'équilibre est noté $\xi_n(t)$.

Ce modèle permet d'étudier la propagation d'une onde sonore (ou de toute onde de compression, comme les ondes sismiques P) dans un solide.

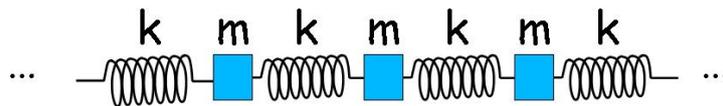


FIGURE 1.1 – Chaîne infinie d'atomes, modèle de la propagation du son dans les solides.

1. Justifier le modèle adopté du ressort pour les interactions entre atomes.

2. Montrer que l'équation vérifiée par $\xi_n(t)$ est

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -k(2\xi_n - \xi_{n+1} - \xi_{n-1})$$

3. Faire l'approximation des milieux continus.

La distance entre deux atomes dans un cristal est de l'ordre de 10^{-10} m, distance très inférieure au longueur d'onde étudiée.

D'où l'on définit une fonction $\xi(x, t)$ de l'espace et du temps par la relation suivante $\xi(x = nd, t) = \xi_n(t)$.

Montrer alors que l'équation ci dessus devient :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -k(2\xi(x, t) - \xi(x + d, t) - \xi(x - d, t))$$

4. Faire un développement limité de $\xi(x + d, t)$ et $\xi(x - d, t)$ à l'ordre 2 (en justifiant la nécessité de faire le DL à cet ordre.)

5. En déduire alors l'équation de propagation de $\xi(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{kd^2}{m}$$

6. Quelle est la dimension de c dans cette équation ?

7. Avec $K \simeq 10 \text{ N.m}^{-1}$, $m \simeq 10^{-26} \text{ kg}$ et $d \simeq 10^{-10} \text{ m}$, estimer c et commenter.

8. Justifier le nom d'ondes longitudinales donné aux solutions de cette équations.

1.2 Résolution de l'équation de D'Alembert.

L'équation trouvée ci dessus est appelée équation de d'Alembert.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{cas unidimensionnel}$$

$$\Delta \xi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta \text{ l'opérateur Laplacien généralisation au cas tridimensionnel}$$

$$\square \xi = 0 \quad \text{avec} \quad \square \text{ l'opérateur d'Alembertien}$$

1.2.1 Recherche de la solution générale.

1. Introduire pour nouvelle variable $u = t - \frac{x}{c}$ et $v = t + \frac{x}{c}$. Montrer en faisant le changement de variable que l'équation de d'Alembert devient dans ce système de coordonnées :

$$4. \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = 0$$

2. En déduire que la forme des solutions est $\xi = f(u) + g(v) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$
3. Montrer que $f(t - \frac{x}{c})$ correspond à une propagation dans le sens des x positifs, sans atténuation ni déformation.
4. Commenter l'expression de la vitesse obtenue $c^2 = \frac{kd^2}{m}$ en fonction de la raideur et de l'inertie du matériau.

1.2.2 Onde Plane Progressive Harmonique.

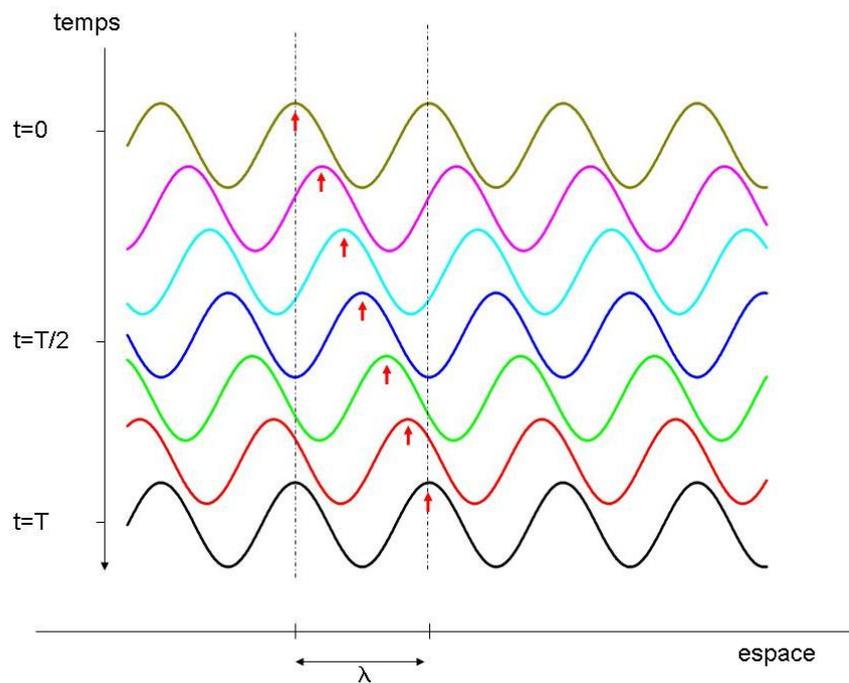


FIGURE 1.2 – Onde Plane Progressive Harmonique.

1. Justifier alors l'utilisation de la forme suivante pour $f(t - \frac{x}{c}) = A \cos(\omega(t - \frac{x}{c}))$.
2. Cette expression se met sous la forme abrégé $A \cos(\omega.t - k.x)$ ω désigne la pulsation et k le vecteur d'onde. Trouver le lien entre ces deux paramètres. Cette relation s'appelle relation de dispersion.
3. Dans les exercices, compte tenu de ce qui précède, il est courant de chercher la forme des solutions sous forme d'une Onde Plane Progressive Harmonique OPPH $A \cos(\omega.t - k.x)$. En injectant cette expression dans l'équation de d'Alembert, retrouver la relation de dispersion.

1.2.3 Onde stationnaire.

1. Chercher des solutions de l'équation de d'Alembert sous forme d'une fonction $\xi(x, t) = \Xi(x)\psi(t)$.

2. Par séparation des variables (Méthode générale, très importante), trouver l'équation dont $\Xi(x)$ et $\psi(t)$ sont solution respectivement.
3. Montrer alors que $\xi(x, t) = A \cos(\omega t - \varphi_1) \cos(kx - \varphi_2)$
4. Justifier le nom d'onde stationnaire.

1.2.4 Onde progressive, onde stationnaire et détermination des constantes.

Il faut être conscient que les solutions sous forme d'ondes progressives ou sous forme d'ondes stationnaires sont parfaitement équivalente.

La somme de deux ondes progressives de même amplitude mais de sens de propagation différent donne une onde stationnaire. (Ce qui se sent bien physiquement)

La somme de deux ondes stationnaires déphasées de $\frac{\pi}{2}$ donne une onde progressive.

Le choix de la forme des solutions est donc arbitraires (ce qui se montre mathématiquement)

Néanmoins le choix de la forme des solutions est guidé par l'exercice et plus particulièrement par les conditions aux limites imposées.

Dans l'exercice ci dessus, la chaîne infinie d'atomes, il n'y a aucune condition au limite, donc la forme des onde plane progressive harmonique est la mieux adaptée.

Dans l'exercice ci dessous, la corde vibrante de Melde, la corde possède un noeud à une extrémité, cette condition au limite stricte guide donc vers le choix d'une solution de type onde stationnaire.

(Interprétation physique : une onde progressive selon $+\vec{u}_x$ s'est réfléchi à l'extrémité de la corde et s'est transformée en une onde progressive suivant $-\vec{u}_x$, la superposition de ces deux ondes donnant l'onde stationnaire.)

Par ailleurs, les conditions initiales et les conditions aux limites suffisent à calculer toutes les constantes apparues lors de la résolution. Il faut donc bien lire l'énoncé.

1.3 La corde vibrante ou corde de Melde.

1.3.1 Etude théorique.

On étudie le dispositif expérimental de Melde. Cette corde est supposée inextensible, de longueur L , de masse linéique μ . Elle est tendue à l'aide d'une masse M accrochée à la corde via une poulie et excitée par un vibreur à son autre extrémité. On appelle $y(x, t)$ le déplacement transversale d'un morceau de la corde de Melde situé en x à l'instant t .

Pour cette étude, deux hypothèses sont nécessaires.

1. On négligera le déplacement de la corde suivant l'axe des x , tant et si bien que un point de la corde situé en $(x, 0)$ à l'équilibre se retrouve en $(x, y(x, t))$ lors de la vibration de la corde.
2. On supposera le déplacement de la corde faible de manière à ce que l'angle $\alpha(x, t)$ de la corde avec l'horizontal est faible et donc on se limite à ordre 1 dans les Dl en cet infiniment petit.

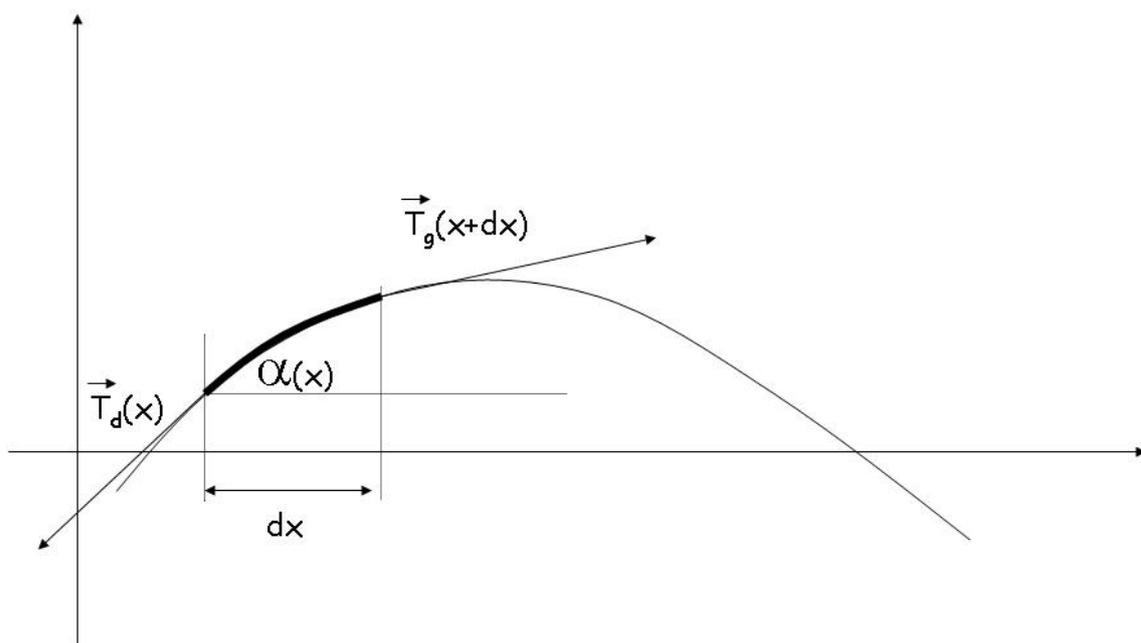


FIGURE 1.3 – Etude de la corde vibrante de Melde.

Remarque : ces deux hypothèses sont cohérentes entre elles et même ne pourrait en former qu'une...

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un élément infinitésimal dx de la corde, montrer que :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{T}_g(x, t) + \vec{T}_d(x + dx, t)$$

2. En projetant sur les axes et en indiquant clairement où les hypothèses faites sont utilisées, montrer que $y(x, t)$ vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

appelée équation de d'Alembert, avec

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

3. Montrer alors la relation de dispersion est $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.
4. Les conditions aux limites pour la corde sont les suivantes :

$$y(x = 0, t) = a \cos(\omega t)$$

et

$$y(x = L, t) = 0$$

Justifiez brièvement ces conditions aux limites.

5. Pour répondre à ces conditions aux limites, la solution proposée est de la forme

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - \phi) \cos(kx - \psi)$$

Comment ce nomme ce type de solution ? Justifiez le choix d'une pareille solution.

6. Montrez que la solution s'écrit

$$y(x, t) = \frac{a}{\sin(kL)} (\omega t) \sin(kL - kx)$$

7. Que se passe-t-il lorsque

$$\omega = \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

? Comment se nomme se phénomène ?

8. La divergence observée ci dessus est-elle physique ? Que se passe-t-il réellement ?

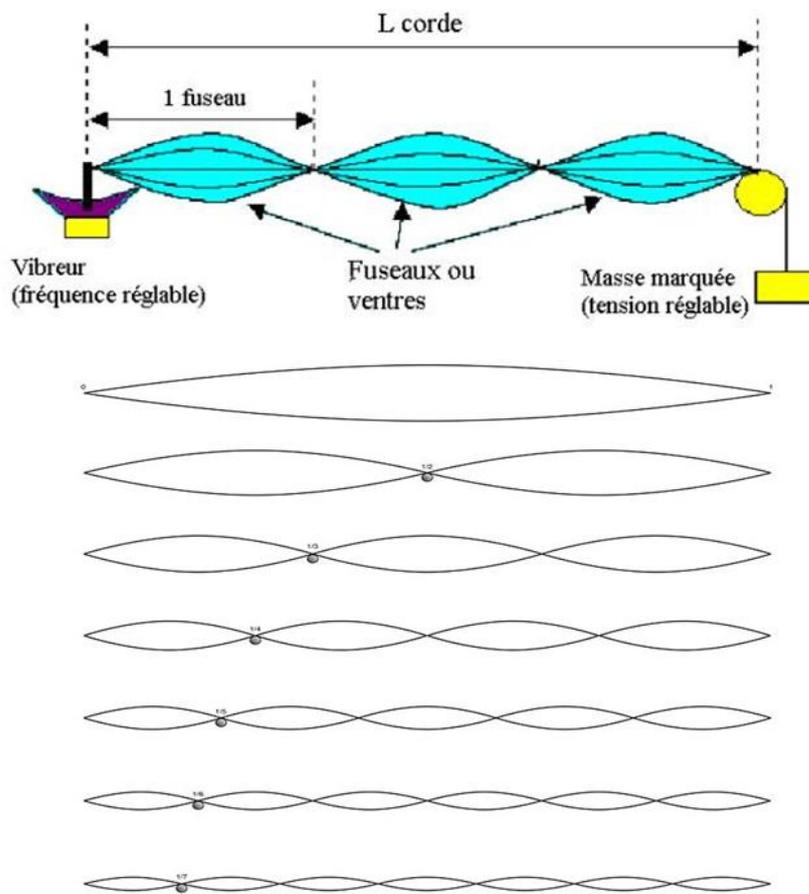


FIGURE 1.4 – Etude des ondes stationnaires dans la corde vibrante.

1.3.2 Etude expérimentale.

1. Estimer dans un premier temps la vitesse c des ondes dans la corde à partir du résultat de la question 1.
2. Pour une longueur L_a de la corde, chercher expérimentalement les fréquences donnant lieu à une résonance. Commenter la précision du résultat. Tracer ces points sur l'ordinateur. En déduire la vitesse C des ondes dans la corde. Comparer à votre estimation.
3. Recommencer ces mesures en faisant varier la longueur L de la corde. $L = L_b$. Commenter la concordance des résultats.
4. Faire varier la tension du fil (donc la masse qui tend la corde). Mesurer à nouveau la vitesse de la corde et vérifier avec les prédictions théoriques.

1.4 Exercice : Modèle du câble coaxial.

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance $l \cdot dx$ et d'une capacité γdx .

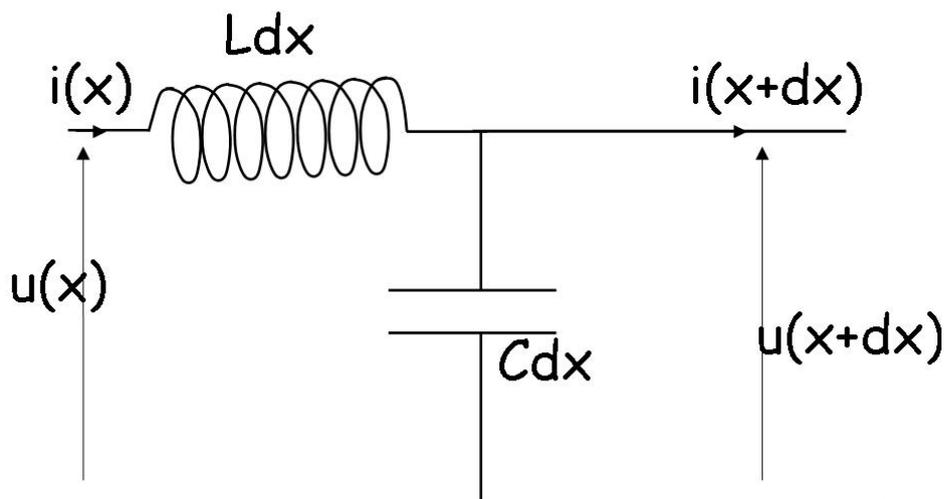


FIGURE 1.5 – Modèle d'une tranche dx de câble coaxial idéal .

1. Rappeler pourquoi il est possible de travailler sur la tranche d'épaisseur dx dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) alors que le phénomène étudié est un phénomène de propagation.

2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ et $i(x,t)$.
3. Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ sont solutions d'équations de d'Alembert. Quelle est la vitesse de propagation des ondes ?
4. Etablir la relation de dispersion.
5. Pour une OPPH selon $+\vec{u}_x$, montrer que le rapport $\frac{u}{i}$ est lié à une caractéristique de la ligne.
6. Dans le cas où cette ligne est semi infinie, fermée en $x = 0$ par un court circuit et qu'une OPPH incidente selon $+\vec{u}_x$ $u_i(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$ est émise, calculer $v(x,t)$ et $i(x,t)$.
(Il faut donc supposer l'existence d'une onde réfléchie et chercher les conditions aux limites, on montre alors que $v(x,t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$)

Chapitre 2

Les ondes sonores dans les fluides.

2.1 Equation de propagation des ondes sonores.

2.1.1 Position du problème.

Dans un fluide au repos, le champ de vitesse d'une particule du fluide $\vec{v}(M, t) = \vec{0}$ (même si les molécules ont une vitesse, comme le mouvement est désordonné, en moyenne, la vitesse est bien nulle) la pression est uniforme p_0 (sur des échelles pas trop grandes en z tout du moins) et la masse volumique aussi μ_0 .

En présence d'une onde sonore, il apparaît un mouvement ordonné des particules $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$, champ de vitesse eulérien qui dépend de l'espace et du temps, une pression acoustique $p_1(\vec{r}, t)$ (soit une pression totale $p_{tot} = p_0 + p_1(\vec{r}, t)$, le pression fluctue donc autour de la valeur moyenne p_0 qui est la valeur à l'équilibre) et une fluctuation de la masse volumique $p_1(\vec{r}, t)$ (soit une masse volumique totale $\mu_{tot} = \mu_0 + \mu_1(\vec{r}, t)$).

L'étude va s'effectuer dans le cadre de **l'approximation acoustique**.

1. Tous les calculs s'effectuent à l'ordre 1 en chacune des fluctuations.
2. Tous les infiniments petits sont du même ordre (d'ordre 1).

Remarque : ces deux hypothèses sont cohérentes entre elles et même ne pourrait en former qu'une, comme précédemment... Ces hypothèses devront être vérifiées a posteriori.

2.1.2 Mise en équation du problème.

1. Ecrire les trois équations nécessaires à l'étude des trois champs précédent (en justifiant l'importance de chacune des équations).

$$\operatorname{div}(\mu\vec{v}) + \frac{\partial\mu}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

$$\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad})\vec{v} \right) = - \operatorname{grad} p \quad (2.2)$$

$$\chi_s = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial p} \text{ soit } \frac{D\mu}{Dt} = \mu \chi_s \frac{Dp}{Dt} \quad (2.3)$$

2. En utilisant l'approximation acoustique, linéariser ces équations et montrer que l'on obtient alors les **équations couplées aux dérivées partielles du premier ordre** suivantes :

$$\mu_0 \operatorname{div}(\vec{v}_1) + \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = 0$$

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \operatorname{grad} p_1$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t}$$

Commenter alors l'approximation acoustique.

3. Obtenir l'équation de propagation de p_1 , **équation découplée aux dérivées partielles du second ordre** suivantes :

$$\Delta p_1 - \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_s}$$

(Rappel d'analyse vectorielle $\operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \Delta$ laplacien)

4. Montrer que l'écoulement est irrotationnel et obtenir l'équation de propagation de \vec{v}_1 , **équation découplée aux dérivées partielles du second ordre** suivantes :

$$\vec{\Delta} \vec{v}_1 - \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \vec{0}$$

(Rappel d'analyse vectorielle $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}) - \operatorname{Delta}$)

5. Commenter l'expression de la vitesse des ondes (en rappelant la valeur de la vitesse du son dans l'air et dans l'eau). Montrer que dans le cas d'un gaz parfait :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

et retrouver alors la valeur de la vitesse de la lumière dans l'air à 300 K

6. Traduire l'équation de propagation pour une OPPH de la forme $\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)$.
Rappel : L'OPPH permet d'utiliser la notation complexe et donc de transformer les **équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants** en des équations algébriques plus simples à manipuler.

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega \text{ et } \vec{\nabla} = j\vec{k}$$

($\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$ et tous les opérateurs vectoriels s'expriment avec $\vec{\nabla}$)

7. Justifier le caractère longitudinal de l'onde.

8. Revenir aux équations couplées aux dérivées partielles du premier ordre, les traduire à l'aide des OPPH. Montrer alors que pour une OPPH se déplaçant dans la direction \vec{u} , on a l'impédance acoustique

$$Z_+ = \frac{p_1}{v_1} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu}{\chi_s}}$$

Généraliser ce résultat pour une OPP.

Il est important de comprendre que les équations de propagations (équation aux dérivées partielles découplées du second ordre) ne sont que des conditions nécessaires et non pas une condition nécessaire et suffisante. En dérivant les équations, une information a été perdue, ici en l'occurrence le couplage entre p_1 et v_1 . Il est donc essentiel lorsque l'on souhaite décrire la structure de l'onde de donner ce couplage.

Remarque : Pour une OPPH se déplaçant dans la direction $-\vec{u}$, on a l'impédance acoustique $Z_- = \frac{p_1}{v_1} = -\mu_0 c = -\sqrt{\frac{\mu}{\chi_s}}$

2.2 Aspect énergétique.

2.2.1 Equation de conservation de l'énergie.

La puissance échangée à travers une surface infinitésimale $d\vec{S}$ par l'onde sonore est :

$$dP = d\vec{F} \cdot \vec{v} = (p_0 + p_1)d\vec{S} \cdot \vec{v}_1 = p_0 d\vec{S} \cdot \vec{v}_1 + p_1 d\vec{S} \cdot \vec{v}_1$$

Le premier terme $p_0 d\vec{S} \cdot \vec{v}_1$ est de valeur moyenne nulle donc il est sans grand intérêt pour l'étude énergétique. Le second terme est donc celui que nous retiendrons.

$$P = \int \int_S p_1 \vec{v}_1 \cdot d\vec{S} = \int \int_S \vec{\Pi}_1 \cdot d\vec{S} \quad \text{avec } \vec{\Pi} = p_1 \vec{v}_1 \text{ vecteur densité de flux sonore}$$

Pour trouver l'équation locale de l'énergie, il faut partir des équations (1), (2) et (3).

$$\left(\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} p_1\right) \cdot \vec{v}_1$$

$$\left(\text{div} \vec{v}_1 = -\chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t}\right) \cdot p_1$$

Il vient alors une expression de l'énergie volumique en présence d'onde sonore :

$$e = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s p_1^2$$

On reconnaît un terme d'énergie cinétique et un terme d'énergie potentiel.

Et l'équation énergétique locale est :

$$\text{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

La forme intégrée (avec le théorème d'Ostrogradski) :

$$\int \int_S \vec{\Pi} d\vec{S} + \frac{d}{dt} E_{tot} = 0$$

L'interprétation de ces deux expressions est la suivante, l'énergie $E_{tot} = \int \int_V e dV$ d'un volume V de fluide (délimité par une surface S) varie du fait de la propagation de l'onde, $\int \int_S (\vec{P} \cdot \vec{i})$ étant la puissance sonore entrant à travers la surface S . Il s'agit donc d'une équation de conservation de l'énergie.

2.2.2 Intensité sonore et décibel acoustique

Définition de l'intensité sonore, en décibel,

$$I = 10 \cdot \ln \left(\frac{\langle \Pi \rangle}{\langle \Pi_0 \rangle} \right) \quad \text{avec } \langle \Pi_0 \rangle = 10^{-12} \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Remarque, pour $I = 130$ dB, seuil de douleur de l'oreille, la pression acoustique est de l'ordre de 100 Pa (vous pouvez faire le calcul exacte, vous trouverez 92 Pa) et la vitesse de $0,1 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ($0,21 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$). Dans les deux cas, $p_1 \ll p_0$ et $v_1 \ll c$.

2.2.3 Expression pour une Onde Plane Progressive Harmonique.

Pour une OPPH se déplaçant dans la direction \vec{u} , il est possible de montrer les résultats suivants :

$$e_c = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 = \frac{1}{2} \chi_s p_1^2 = e_p$$

Il y a équipartition de l'énergie entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

$$\vec{\Pi} = c \cdot e \cdot \vec{u}$$

De plus la valeur moyenne temporelle de l'énergie et du vecteur densité de flux donne :

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 v_{1M}^2$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 c v_{1M}^2 \vec{u} = \langle e \rangle \cdot c \cdot \vec{u}$$

(Rappel : $\langle \cos^2 \rangle = \langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}$) Pour une OPPH, l'interprétation énergétique est donc claire quand à la propagation de l'énergie.

Néanmoins, il faut être conscient que l'OPPH n'est pas véritablement adapté à l'étude énergétique puisque $\langle e \rangle$ ne dépend pas du point de calcul donc l'intégrale triple sur tout l'espace donne ∞ , ce qui n'est pas physique mais qui n'est guère surprenant puisque l'onde plane est elle aussi infinie. (Ce problème est général pour une OPPH).

2.2.4 Expression pour une onde plane stationnaire.

Considérons une OPPH se propageant suivant $+\vec{u}_x$ arrivant sur un mur, situé en $x=0$. La condition au limite imposée par le mur est $v_1(x=0, t) = 0 \forall t$.

Il est alors bon de chercher la forme de la solution sous forme d'une onde stationnaire, qui vérifie la condition au limite et qui est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

$$v_1(x, t) = v_{1m} A \sin(kx) \sin(\omega t) = \frac{v_{1m}}{2} \cos(\omega t - kx) - \frac{v_{1m}}{2} \cos(\omega t + kx)$$

v_1 est une onde stationnaire qui admet un noeud en $x = 0$.

De là, il est possible de calculer p_1 :

$$p_1 = \mu_0 c \frac{v_{1m}}{2} \cos(\omega t - kx) - (-\mu_0 c) \frac{v_{1m}}{2} \cos(\omega t + kx)$$

$$p_1 = \mu_0 c v_{1m} \cos(kx) \cos(\omega t)$$

p_1 est aussi une onde stationnaire qui admet un ventre en $x = 0$. Les ventres de pression sont les noeuds de vitesse et réciproquement.

Finalement, $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$

(Rappel : $\langle \cos() \sin() \rangle = 0$)

Conclusion, une onde stationnaire ne transporte en moyenne aucune énergie.

2.3 Réflexion et transmission d'une onde sonore à une interface sous incidence normale.

Considérons l'interface plane infinie située en $x=0$ entre deux milieux, d'impédance respective Z' et Z'' et une onde sonore plane arrivant sous incidence normale. Cette onde va donner naissance à une réfléchie et une onde transmise.

La vitesse dans le milieu' est donc

$$v'_1 = v_i \exp(j(\omega t - k'x)) + v_r \exp(j(\omega t + k'x))$$

, superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie (contrairement au cas précédent, l'onde est partiellement réfléchie, l'amplitude de l'onde réfléchie est donc inférieure à l'amplitude de l'onde incidente).

La vitesse dans le milieu'' est donc

$$v''_1 = v_t \exp(j(\omega t - k''x))$$

1. Montrer que le champ de pression acoustique est le suivant :

$$v'_1 = Z' \cdot v_i \exp(j(\omega t - k'x)) - Z' \cdot v_r \exp(j(\omega t + k'x))$$

$$v''_1 = Z'' \cdot v_t \exp(j(\omega t - k''x))$$

2. Montrer que les conditions aux limites à l'interface sont :

$$\text{Continuité de la vitesse à l'interface } v_1'(0, t) = v_1''(0, t)$$

$$\text{Continuité de la pression à l'interface } p_1'(0, t) = p_1''(0, t)$$

3. Montrer alors que les coefficients de réflexion et en transmission en amplitude sont :

$$r = \frac{v_r}{v_i} = \frac{Z' - Z''}{Z' + Z''}$$

$$t = \frac{v_t}{v_i} = \frac{2.Z'}{Z' + Z''}$$

4. Montrer alors que les coefficients de réflexion et en transmission en puissance sont :

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = \left(\frac{Z' - Z''}{Z' + Z''} \right)^2$$

$$t = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{4.Z'Z''}{(Z' + Z'')^2}$$

5. Commenter le cas où $Z' \simeq Z''$, nommer adaptation d'impédance.

Nous retiendrons qu'à une interface, les ondes sonores sont correctement transmises que si les impédances de part et d'autres sont voisines.

Par exemple, pour une vitre, l'impédance de l'air est très inférieure à l'impédance du verre. Le coefficient de transmission en puissance à travers une vitre (deux interfaces) est donc T^2 très faible (T^4 dans le cas d'un double vitrage).

Au contraire pour une échographie, il faut que les ondes pénètrent dans le corps, d'où la présence d'un gel pour mieux adapté l'impédance.

2.4 Expériences

2.4.1 Expériences avec les émetteurs récepteurs à ultrason.

Une fois réglé à la résonance, il est possible de faire des expériences simples avec les ultrasons. (Certains même marchent dans l'eau et permettent de faire aussi des mesures dans l'eau. Créer des ondes stationnaires, faire de la transmission d'onde ...

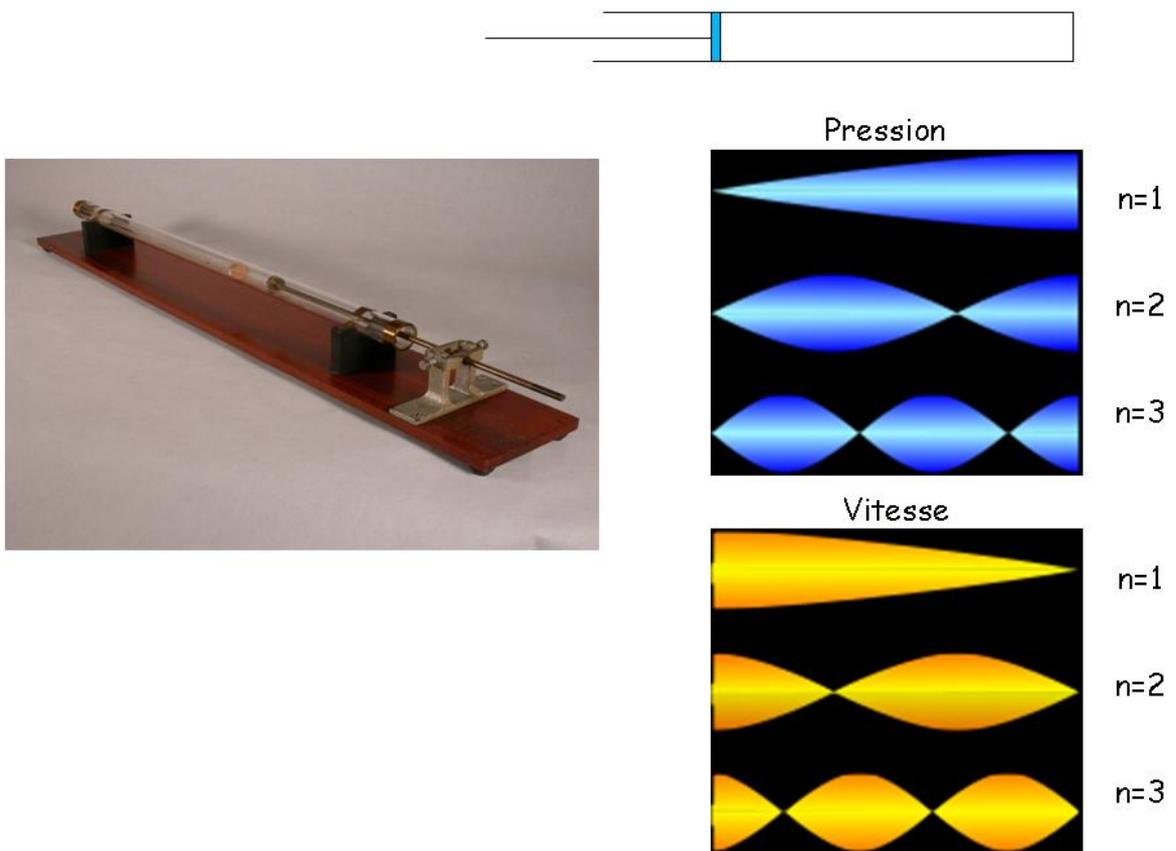


FIGURE 2.1 – Onde sonore dans le tube de Kundt.

2.4.2 Tube de Kundt.

Il existe un phénomène analogue à la corde vibrante de Melde en acoustique dans les tuyaux sonores, ce qu'illustre le tube de Kundt. Les extrémités du tube sont ouvertes, donc en première approximation, la pression admet en ces points un ventre, et par conséquent, un noeud de vitesse.

Les longueurs d'ondes vérifient par conséquent $\lambda_n = \frac{L}{n}$, soit $f = \frac{n \cdot c}{L}$. Il est possible de détecter le fondamental et les harmoniques en faisant la transformée de Fourier du signal.

Néanmoins, même si la précision de ces manipulations restent médiocre, il est possible de déceler une léger écart entre théorie et expérience dans la mesure où la pression n'admet pas exactement un ventre à chaque extrémité.

Vous pouvez aussi augmenter le débit dans le tube et voire l'évolution du signal (en fréquence et au décibelmètre).

Les silencieux de voiture sont eux fondés sur le processus inverse (minimiser le son de la voiture).

Autres prolongations possibles.

Il est aussi à noter que le phénomène mis en évidence ici a aussi son analogue en optique, dans le Fabry-Pérot et dans les cavités lasers.

Chapitre 3

Les ondes électromagnétiques dans le vide.

3.1 Equation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

1. Rappeler les équations de maxwell.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1)$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.3)$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.4)$$

2. Simplifier ces équations dans le cas du vide.
3. Montrer l'équation de propagation de \vec{E} dans le vide est :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

4. Montrer l'équation de propagation de \vec{B} dans le vide est :

$$\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

5. Etudier la structure des OPP dans le vide, en revenant aux équations découplées du premier ordre.
 - (a) Montrer tout d'abord que la relation de dispersion est

$$k = \frac{\omega}{c}$$

(b) Montrer que l'onde est transversale :

$$\vec{u} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{B} = 0$$

(c) Montrer que

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

(d) Ces résultats sont-ils généralisables à une OPP ?

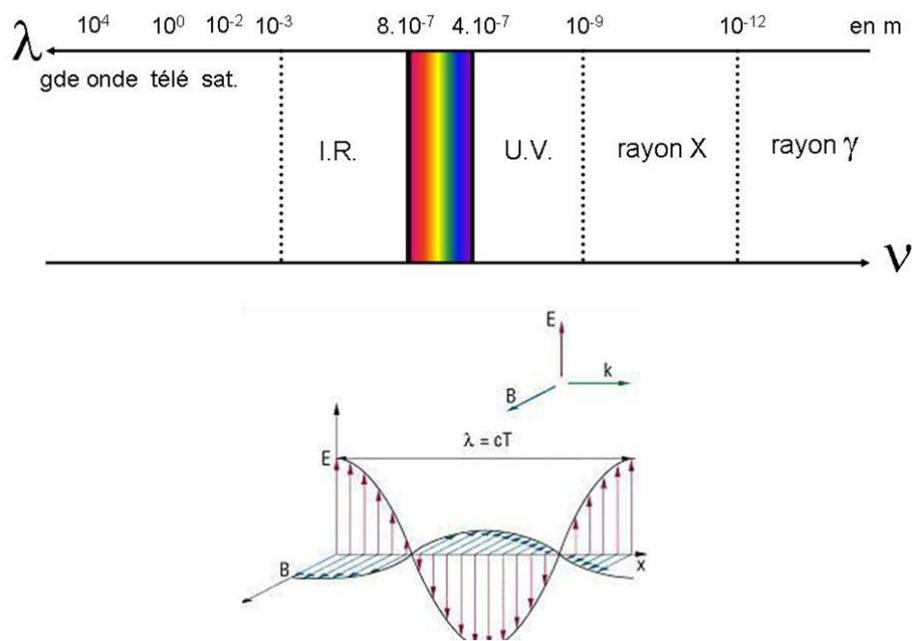


FIGURE 3.1 – Onde électromagnétique.

3.2 Rappel sur la polarisation des OPPH.

La direction du champ électrique de l'onde électromagnétique est appelée direction de polarisation. par convention dans ce qui suit, \vec{u}_x désigne la direction de propagation.

La polarisation elliptique correspond à $\vec{E} = \begin{matrix} E_0 y \cos(\omega t - kx) \\ \pm E_0 z \cos(\omega t - kx) \end{matrix}$ Le signe + correspond à la PE gauche et le signe - à la PE droite. (Pour le voir, regarder l'onde arrivée.)

La polarisation circulaire correspond à $\vec{E} = \begin{matrix} E_0 \cos(\omega t - kx) \\ \pm E_0 \cos(\omega t - kx) \end{matrix}$ Le signe + correspond à la PE gauche et le signe - à la PE droite. (Pour le voir, regarder l'onde arrivée.)

La polarisation rectiligne correspond à $\text{vec}E = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$.
La polarisation elliptique permet d'étudier n'importe quelle polarisation. (Attention néanmoins, laisser vous guider par l'énoncé... Si celui ci suggère d'utiliser la polarisation circulaire, qui constitue aussi une base génératrice de l'ensemble des solutions, il faut suivre l'énoncé. Ainsi quand on veut étudier les propriétés de chiralité, c'est la base des OPPH polarisées circulairement qu'il faut utiliser. Dans ce cas précis, l'énoncé vous guide).

3.3 Aspect énergétique de la propagation des ondes électromagnétiques

Pour effectuer les calculs énergétiques, il est conseillé de revenir aux formes réelles des expressions (donc ne plus utiliser les notations complexes) car en effet les formes de l'énergie sont quadratiques (E^2 , B^2 , ...) et donc non linéaires donc non adaptés à la notation complexe.

Le vecteur de Poynting de l'onde électromagnétique est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

La puissance électromagnétique transportée à travers une surface S est le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface :

$$P_{(S)} = \int \int_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Dans le cas d'une OPPH PR suivant \vec{u}_y , $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$, on trouve alors

$$\vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x$$

Comme il faut s'intéresser à la valeur moyenne temporelle de cette expression puisque les détecteurs ne sont en général sensibles qu'à la valeur moyenne compte tenu de la fréquence élevée du signal

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

L'énergie volumique associée à l'onde électromagnétique est :

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

L'énergie électromagnétique dans le volume V est :

$$U_{em} = \int \int \int u_{em} dV$$

Dans le cas d'une OPPH PR suivant \vec{u}_y , $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$, on trouve alors

$$u_{e\ m} = \epsilon_0 E^2$$

soit en valeur moyenne

$$\langle u_{e\ m} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

Noter l'équipartition de l'énergie entre les deux contributions, électrique et magnétique (résultat identique à celui rencontré pour les ondes sonores.)

L'énergie se propage donc à la vitesse c de l'onde.

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle u_{e\ m} \rangle c \vec{u}_x$$

Néanmoins, comme pour les ondes sonores, il convient de noter le caractère non physique de l'OPPH choisie puisque $\langle u_{e\ m} \rangle$ est uniforme, indépendant du point de l'espace et que donc une intégration sur tout l'espace conduit à une énergie infinie (l'OPPH ayant une extension infinie, rien de surprenant à cela) mais il ne faut pas s'alarmer de ce résultat car la solution est une superposition d'OPPH, (car les équations sont linéaires), et alors ce problème disparaît.

Au bilan, l'équation énergétique locale en électromagnétisme s'écrit :

$$\text{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial u_{e\ m}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

(Ce qui s'interprète en disant que les variations d'énergie électromagnétiques sont dues à la propagation de l'onde, donc aux flux du vecteur de Poynting, soit à l'absorption par le milieu. Cette équation se démontre à partir des équations de Maxwell et l'analyse vectorielle).

Ici, comme on s'intéresse aux ondes dans le vide, il n'y a pas de perte par absorption dans le milieu $\vec{j} \cdot \vec{E} = 0$. D'où l'équation analogue à celle obtenue pour les ondes sonores :

$$\text{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial u_{e\ m}}{\partial t} = 0$$

La forme intégrée (avec le théorème d'Ostrogradski) :

$$\int \int_S (\vec{\Pi}) + \frac{d}{dt} U_{e\ m} = 0$$

3.4 Rayonnement dipolaire.

Le caractère non physique de l'OPPH a déjà été évoqué à plusieurs reprises : l'idée étant que l'OPPH est aisée pour la résolution et permet de reconstruire par transformée de Fourier toutes les solutions, dont l'énergie ne diverge pas sur l'espace.

Ce paragraphe va apporter un autre élément de réponse au problème puisque nous allons montrer qu'une onde réelle peut s'assimiler localement à une OPPH.

3.4.1 Présentation du modèle : dipôle oscillant dans sa zone de rayonnement.

Nous allons nous intéresser au modèle du dipôle oscillant et considérer donc un ensemble de particules dont le moment dipolaires électriques s'écrit

$$\vec{P} = P_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

L'extension géométrique de ce dipôle, notée a est supposée très inférieure à la longueur d'onde $a \ll \lambda = c.T$ du rayonnement émis. Si on s'intéresse à des ondes visibles $\lambda \simeq 600nm$, les atomes qui émettent ont une extension de l'ordre de l'Angström. L'approximation est bien vérifiée. Pour les téléphones portables, la longueur d'onde est plutôt de l'ordre du centimètre et les antennes millimétrique, l'approximation est donc un peu plus limite.

En outre, on va s'intéresser non pas au champ proche mais au champ loin, dans la zone de rayonnement, donc en un point M située à une distance $OM = r$ du dipôle telle que $r \gg \lambda$.

Au final, l'étude s'effectue sur trois échelles spatiales très différentes :

$$a \ll \lambda \ll r$$

3.4.2 Expression du champ rayonné.

Les nouveaux programme de CPGE ne demande plus la démonstration de ces expressions, qui se faisait à partir des équations des potentiels retardés. (Cf. Tec et Doc Stéphane Olivier ancienne version)

L'expression de \vec{E}, \vec{B} est aujourd'hui admise mais il faut savoir la commenter.

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \vec{u}_\varphi$$

1. L'amplitude du champ rayonné décroît en $\frac{1}{r}$ (en électrostatique, le champ du dipôle décroît en $\frac{1}{r^3}$). Cette décroissance en $\frac{1}{r}$ est lié à la répartition de la puissance sur une sphère. (cf. partie suivante)
2. L'amplitude du champ rayonné dépend de $\sin \theta$ et est donc anisotrope : l'amplitude est nulle sur l'axe z , qui est l'axe du dipôle et est maximal dans le plan équatorial Oxy .
3. Le champ est lié à la dérivée seconde du moment dipolaire, ce qui signifie que seule les charges accélérées sont susceptibles d'émettre une onde électromagnétique. (Penser aux particules chargées dans les accélérateurs de particules qui rayonnent, ce qui est mis à profit parfois pour faire de l'imagerie par rayon X, c'est le projet Soleil du CEA)
4. Le champ correspond à une onde progressive comme en témoigne le facteur $t - \frac{r}{c}$

5. le champ possède localement la structure d'une onde électromagnétique plane progressive dans le vide selon la direction \vec{u}_r puisque

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

Néanmoins, cette analyse n'est que local puisque l'amplitude décroît et est anisotrope.

3.4.3 Puissance rayonnée.

Le vecteur de Poynting de cette onde électromagnétique est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_r = \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2 c} \dot{p}^2 \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

La puissance totale rayonnée est donc

$$\langle P \rangle = \int \int_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \langle \dot{p}^2 \rangle \left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

La puissance rayonnée est donc indépendante du rayon r de la sphère. Ceci est lié à la décroissance en $\frac{1}{r}$ de l'amplitude des champs, qui n'est donc pas lié à un phénomène d'absorption mais à la répartition de la puissance sur la surface d'une sphère (en r^2).

3.4.4 La diffusion Rayleigh et le bleu du ciel.

Alors que la lumière du soleil est dominée par le jaune et non polarisée, la lumière du ciel est bleue (par beau temps) et partiellement polarisée voir totalement polarisée dans une direction d'observation précise.

Pour rendre compte de ces observations, il faut être conscient que l'onde électromagnétique incidente interagit avec les molécules de l'atmosphère qui se comportent alors comme des dipôles oscillant (excité par l'onde incidente), ces dipôles rayonnent alors une onde dans toutes les directions : la lumière incidente est diffusée.

Pour étudier quantitativement le phénomène, il faut recourir au modèle de l'électron élastiquement lié, dont les hypothèses sont les suivantes :

1. les électrons sont traités indépendamment
2. Chaque électrons est assimilé à un oscillateur harmonique amorti. L'électron est donc soumis à une force de rappel $-m\omega_0 \vec{r}$ (l'électron est lié au noyau) et une force de frottement fluide $-m\Gamma \dot{\vec{r}}$ (le dipôle rayonne donc perd de l'énergie). $\omega_0 \simeq 10^{16} \text{rad.s}^{-1}$ et $\Gamma \simeq 10^8 \text{rad.s}^{-1} \ll \omega_0$
3. L'électron est soumis à la force électromagnétique lié à la présence de l'onde $\omega \simeq 3.10^{15} \text{rad.s}^{-1}$ pour le visible, mais la contribution magnétique est négligeable $\frac{f_m}{f_e} = \frac{qvB}{qE} = \frac{v}{c} \ll 1$.

La seule force est donc la force électrique $\vec{f} = -eE_0 \vec{u}_z \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$, en prenant pour onde incidente une OPPH PR. Mais comme l'amplitude du mouvement $0,1 \text{nm}$ de l'électron est

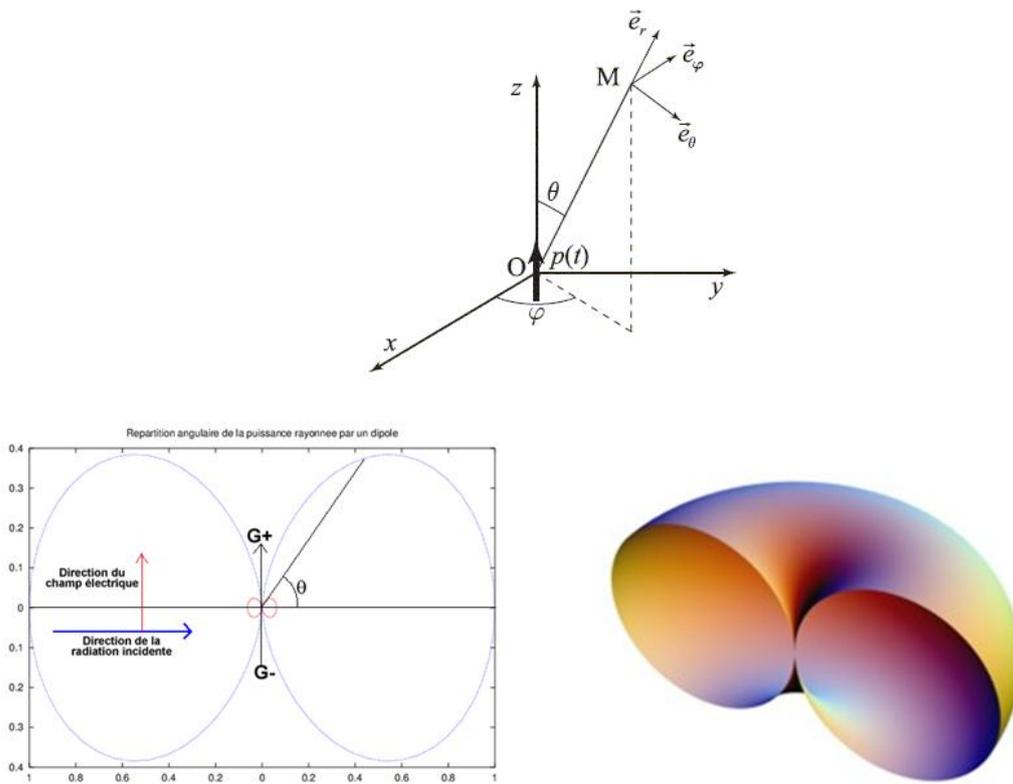


FIGURE 3.2 – Rayonnement des ondes électromagnétiques par le dipôle oscillant.

supposée très faible devant la longueur d'onde $600nm$, l'expression précédente se simplifie en $\vec{f} = -eE_0\vec{u}_z \cos(\omega t)$.

1. Montrer que le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron conduit à

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\Gamma\dot{\vec{r}} - m\omega_0\vec{r} - eE_0\vec{u}_z \cos(\omega t)$$

2. En utilisant la notation complexe (l'équation étant linéaire à coefficient constant et que l'on s'intéresse au régime forcé), montrer que :

$$\vec{r} = -\frac{eE_0\vec{u}_z \exp(j\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega)}$$

soit

$$\vec{p} = -e\vec{r} = \frac{e^2E_0\vec{u}_z \exp(j\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega)}$$

3. Montrer que compte tenu des ordres de grandeurs ci dessus,

$$\vec{p} = \frac{e^2E_0\vec{u}_z \exp(j\omega t)}{m\omega_0^2}$$

4. En revenant au notation réelle (puisque la puissance rayonnée est quadratique), montrer que

$$\ddot{\vec{p}} = -\frac{e^2\omega^2E_0\vec{u}_z \cos(\omega t)}{m\omega_0^2}$$

5. Montrer à partir des résultats ci dessus que

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} = \frac{\mu_0 e^4 \omega^4 E_0^2}{12\pi m^2 \omega_0^2 c}$$

De cette expression, il est possible d'interpréter les observations. D'une part, la puissance rayonnée est proportionnelle à ω^4 donc le rayonnement dans le bleu est 16 fois plus important que dans le rouge. De là, il est aussi possible d'interpréter la couleur rouge du soleil couchant. En effet, comme la diffusion est plus importante dans le bleu que dans le rouge, l'absorption est donc plus importante dans le bleu que dans le rouge. Au couchant, quand la couche d'atmosphère traversée est plus importante, tout le rayonnement bleu est absorbé, et le soleil est rouge.

Pour la polarisation, elle est lié au fait qu'un dipôle ne rayonne rien sur son axe.

Chapitre 4

Dispersion et absorption.

4.1 Relation de dispersion : dispersion et absorption.

4.1.1 Relation de dispersion

Une fois l'équation de propagation trouvée, nous l'avons vu, il est commode de chercher la forme des solutions sous forme d'une OPPH de la forme $A_0 \cdot \exp(j\omega t - j\vec{k} \cdot \vec{r})$. En injectant cette forme dans l'équation de propagation, on trouve l'équation liant k et ω . Cette équation s'appelle **relation de dispersion**.

Exemple extrait de l'exercice sur la ligne bifilaire (cf. infra) qui modélise un câble coaxial : $k^2 = \omega^2 l\gamma - j\omega(lg + r\gamma) - rg$

Pour dégager le contenu physique de la relation de dispersion, il est aisé de supposer ω réel (à l'entrée de la ligne, on impose un signal sinusoïdal) et alors k est un complexe, qui peut s'écrire de la forme $k(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$.

Remarque 1 : dans certains exercices, compte tenu des Conditions aux Limites, il est parfois préférable de supposer k réel et de calculer ω complexe $\omega(k) = \omega'(k) + j\omega''(k)$.

Remarque 2 : quand k est complexe (ou ω), l'onde porte alors le nom de pseudo onde plane progressive harmonique (OPPH*).

Pour dégager le sens physique de k' et k'' , il faut revenir à l'onde en réel.

$$a(x, t) = A_0 \exp(k'' \cdot x) \cos(\omega \cdot t - k' \cdot x)$$

4.1.2 Absorption.

Le fait que k possède une partie imaginaire donne naissance à un terme réel, caractéristique d'un amortissement $k'' < 0$ (le cas de l'amplification est rare sauf dans les lasers $k'' > 0$). Le milieu est alors dit **absorbant** et l'absorption s'effectue sur une distance caractéristique

$$d = \frac{1}{|k''|}$$

Au delà d'une distance de quelques d , l'onde ne se fait plus sentir.

4.1.3 Dispersion : vitesse de phase et vitesse de groupe.

4.1.4 la vitesse de phase.

La phase $\varphi(t) = \omega t - k'x$ se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)}$. ($\varphi(t) = \omega t - k'x = \omega(t - \frac{x}{v_\varphi})$).

Cette vitesse de phase dépend a priori de la pulsation ω de l'onde étudiée, tant et si bien que deux ondes de pulsations différentes n'ont pas la même vitesse de propagation. Les ondes de pulsation différentes sont donc dispersées. Le milieu est dit **dispersif**.

Pour bien comprendre le phénomène de dispersion, il ne faut donc pas se contenter d'étudier une seule OPPH* mais une superposition d'OPPH* appelée **paquet d'onde**.

le paquet d'onde.

Pour étudier un problème d'onde dont l'équation de propagation est linéaire à coefficient constant, il faut procéder comme tel :

1. utiliser la décomposition en harmonique de l'excitation $\underline{a}(x = 0, t) = \sum_{\omega} \hat{a}(\omega) \exp(j\omega t)$ (La somme peut être une somme continue i.e. une intégrale)
2. étudier la propagation de chacune des composantes
3. en déduire alors la déformation du signal

Etudions donc la propagation du paquet d'onde.

Lors de la propagation du signal, chaque composante $\hat{a}(\omega) \exp(j\omega t)$ devient $\hat{a}(\omega) \exp(j\omega t - jk'(\omega)x)$. Le signal global est alors la superposition de toutes les composantes que l'on nomme paquet d'onde.

$$\underline{a}(x, t) = \sum_{\omega} \hat{a}(\omega) \exp(j\omega t - jk'(\omega)x)$$

Pour extraire de l'information du signal, on va supposer que toutes les ondes qui composent le paquet d'onde ont une pulsation voisine d'une pulsation moyenne ω_0 et donc nous allons faire un Développement Limité au voisinage de ω_0 :

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0) = \omega_0 + \delta\omega$$

$$k'(\omega) = k'(\omega_0) + \left. \frac{dk'}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) = k'_0 + \left. \frac{dk'}{d\omega} \right|_{\omega_0} \delta\omega$$

On remplaçant dans les expressions, il vient :

$$\underline{a}(x, t) = \sum_{\omega} \hat{a}(\omega) \exp(j(\omega_0 + \delta\omega)t - j(k'_0 + \left. \frac{dk'}{d\omega} \right|_{\omega_0} \delta\omega)x)$$

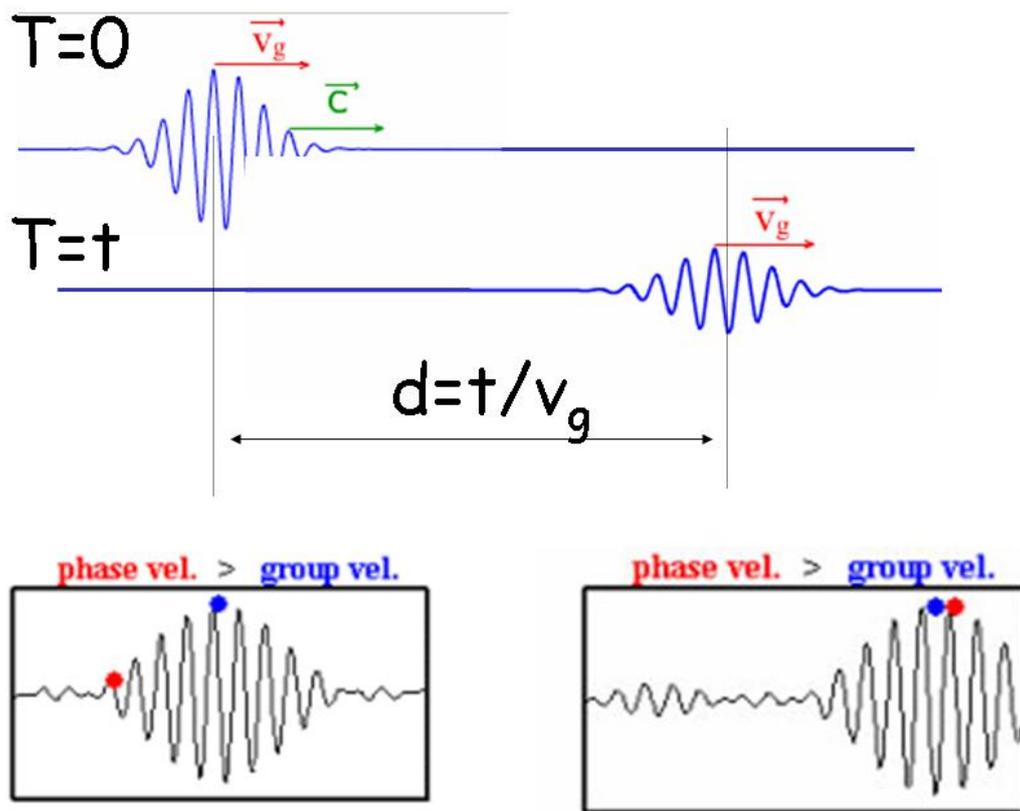


FIGURE 4.1 – Déformation du paquet d'onde dans un milieu dispersif.

Soit, en sortant de la somme les terme devenu indépendant de ω :

$$\underline{a}(x, t) = \exp(j\omega_0 t - jk'_0 x) \sum_{\omega} \hat{a}(\omega) \exp(j\delta\omega t - j\frac{dk}{d\omega})_0 \delta\omega x)$$

Le premier terme $\exp(j\omega_0 t - jk'_0 x)$ désigne la propagation de l'onde moyenne alors que $\sum_{\omega} \hat{a}(\omega) \exp(j\delta\omega(t - \frac{dk'}{d\omega})_0 x)$ désigne la propagation de l'enveloppe du signal, dont la vitesse de propagation est la **vitesse de groupe** :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'}_{\omega_0}$$

La vitesse de phase diffère donc de la vitesse de groupe, ce qui fait que le paquet d'onde se déforme en se propageant. Tel est la caractéristique d'un phénomène dispersif.

4.2 La ligne bifilaire réelle.

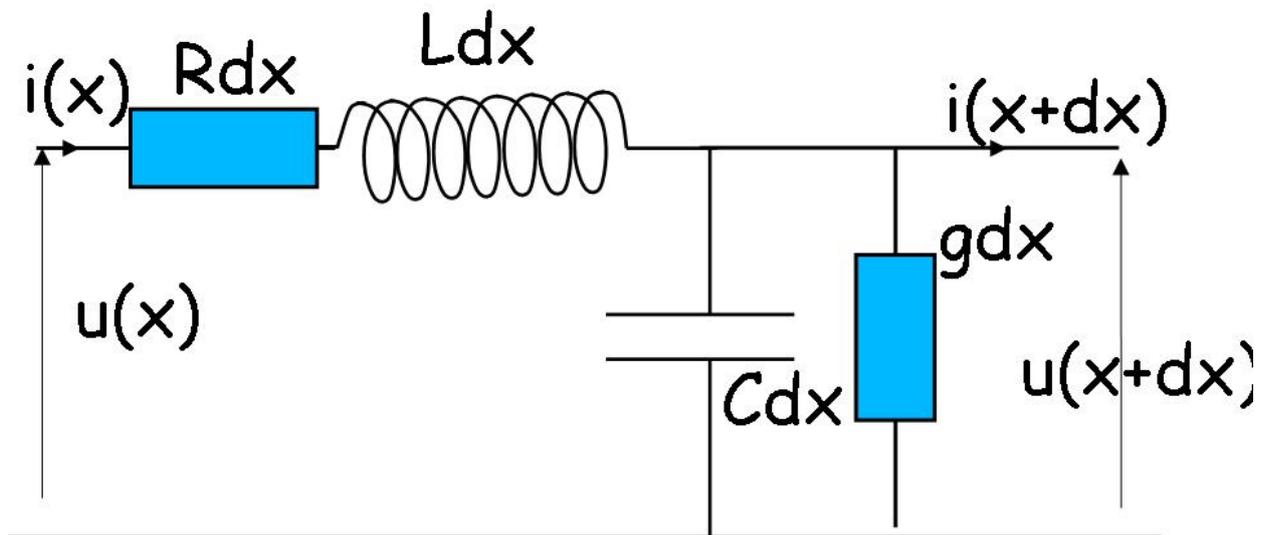


FIGURE 4.2 – Modèle d'une tranche dx d'un câble coaxial réel.

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance $l \cdot dx$ et d'une capacité γdx . Pour rendre compte des imperfections de la ligne bifilaire, il faut ajouter en série une résistance $r dx$ à l'inductance et une conductance $g dx$ en parallèle du condensateur.

1. Rappeler pourquoi il est possible de travailler sur la tranche d'épaisseur dx dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) alors que le phénomène étudié est un phénomène de propagation.
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ et $i(x,t)$.
3. Etablir la relation de dispersion. Montrer qu'elle est de la forme $k^2 = \omega^2 l \gamma - j\omega(lg + r\gamma) - rg$. Commenter cette expression dans le cas où $r = 0$ et $g = 0$.
4. Calculer la vitesse de phase, la vitesse de groupe ainsi qu'une distance caractéristique de l'amortissement.
5. Montrer que pour un choix judicieux de r et g , la vitesse de phase et l'amortissement sont indépendants de ω . Justifier l'intérêt de ce choix.

4.3 Le guide d'onde : dispersion dues aux conditions aux limites.

Le guide d'onde de longueur infinie est de section rectangulaire $a.b$: $0 < x < a$ et $0 < y < b$. Il est fait de métal assimilé à un conducteur parfait (donc le champ électrique et magnétique à l'intérieur du métal est nul.) L'intérieur du guide d'onde est rempli d'air assimilé à du vide.

1. A partir des équations de passages des champs, justifier que la composante tangentielle au métal du champ électrique est nulle $\vec{E}_t = \vec{0}$ et que la composante normale au métal du champ magnétique est nulle $\vec{B}_n = \vec{0}$
2. Dans la suite, on cherche des solutions de la forme $\vec{E} = A(x, y) \exp(j\omega t - jk_g z) \vec{u}_y$.
Montrer que A ne dépend pas de y .
Montrer que l'équation dont A est solution est

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right) A = 0$$

Compte tenu des Conditions aux limites, montrer que $\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 > 0$. Montrer alors que

$$\vec{E}_n = A_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp(j\omega t - jk_{g,n} z) \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad k_{g,n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

Commenter l'expression du champ, à x fixé d'une part et à z fixé d'autre part.

3. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
4. Calculer le champ magnétique \vec{B}_n en justifiant la nécessité de revenir aux équations de Maxwell pour ce calcul. Vérifier que la forme proposée vérifie les conditions aux limites.

5. Calculer la puissance moyenne temporelle du vecteur Poynting et montrer que

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{A_{0,n}^2 k_{g,n}}{2\mu_0\omega} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{u}_z$$

Commenter cette expression En déduire que

$$\langle P \rangle = \frac{A_{0,n}^2 k_{g,n} a \cdot b}{4\mu_0\omega}$$

Commenter.

6. Montrer que l'énergie électromagnétique moyenne par unité de longueur du guide est

$$\left\langle \frac{dU_{em}}{dz} \right\rangle = \frac{\epsilon_0 A_{0,n}^2 ab}{4}$$

7. Déduire des deux expressions ci avant la vitesse de propagation de l'énergie v_e

8. Réinterpréter l'expression de \vec{E}_n comme une superposition de deux OPPH.

$$\vec{E}_n = -\frac{jA_{0,n}}{2} \exp(j\omega t - jk_{g,n}z - j\frac{n\pi}{a}x) \vec{u}_y + \frac{jA_{0,n}}{2} \exp(j\omega t - jk_{g,n}z + j\frac{n\pi}{a}x) \vec{u}_y$$

Réinterpréter alors la forme de \vec{B}_n

4.4 L'effet de peau : électromagnétisme dans les métaux.

On s'intéresse à un conducteur pour lequel la loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

1. Etude de la densité volumique de charge ρ du conducteur.

Montrer à partir de l'équation de conservation de la charge que ρ est solution de l'équation :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Sachant que $\sigma \simeq 10^8 S.m^{-1}$, calculer un ordre de grandeur des variations temporelles de ρ . Sachant que l'on s'intéresse à des fréquences $< 10^{16} Hz$, justifier que l'on peut considérer $\rho = 0$. Ce résultat est général : un conducteur est localement neutre.

2. Montrer dans l'équation de Maxwell $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ que le terme $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant le terme $\mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$.

Les équations de Maxwell sont alors les mêmes que dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires.

3. Montrer à partir des équations de Maxwell dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires que l'équation de propagation est

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4. Cette équation est une équation de diffusion. Donner alors la dimension du coefficient D et une première estimation de l'épaisseur de peau.
5. On suppose alors que le métal occupe tout le demi espace $z > 0$, l'espace $z < 0$ étant occupé par l'air assimilé à du vide. La solution cherchée est de la forme $\vec{E} = E(z, t)\vec{u}_x$
Montrer que la relation de dispersion est la suivante

$$k^2 = -j\mu_0\sigma\omega$$

6. En utilisant le fait que $-j = \frac{(1-j)^2}{2}$, trouver l'expression de $k(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$. En déduire la forme de \vec{E} et conclure quant à l'épaisseur de peau.
7. Calculer le champ magnétique résultant.

Chapitre 5

Problème de révision : ondes électromagnétiques dans les plasmas.

Un plasma d'hydrogène est un milieu assimilé à un gaz où les atomes d'hydrogène sont totalement ionisés, donc le plasma est constitué d'électron $(-e, m_e)$ et de proton (e, m_p) . Au repos, en l'absence de perturbation, le plasma est localement neutre : il y a n_0 électrons par unité de volume et n_0 protons par unité de volume.

5.1 Onde longitudinale dans les plasmas

On étudie dans cette partie l'effet d'une onde électromagnétique $\vec{E}_1 = E_1(x, t)\vec{u}_x = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_x$, \vec{B}_1 .

Cette onde met en mouvement les charges et on note $\vec{v}_e = \vec{v}_{1,e}(x, t)\vec{u}_x$ la vitesse des électrons et $\vec{v}_p = \vec{v}_{1,p}(x, t)\vec{u}_x$ celles des protons.

De plus, cette onde modifie la répartition spatiaux-temporelle des charges de telle sorte que le nombre de charges par unité de volume en présence de l'onde s'écrit pour les électrons $n_e = n_0 + n_{1,e}(x, t)$ et de manière similaire pour les protons $n_p = n_0 + n_{1,p}(x, t)$.

Tous les champs d'ordre 1 introduits sont des infiniments petits du même ordre et on se limite à l'ordre 1 en cet infiniment petit.

1. Justifier l'appellation onde plane et longitudinale.
2. Montrer que $\overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{0}$. En déduire $\vec{B}_1 = \vec{0}$
3. Calculer la densité de courant volumique \vec{j} . En déduire avec l'équation de conservation de la charge que

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{n_0 e}{\epsilon_0} (v_{1,p} - v_{1,e})$$

4. En appliquant la seconde loi de Newton a un électron, montrer que

$$\frac{\partial v_{1,e}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} E_1(x, t)$$

5. Faire de même avec les protons et montrer qu'alors $v_{1,p} \ll v_{1,e}$.
6. Montrer alors que la relation de dispersion est

$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}$$

Commenter le comportement du plasma.

7. Calculer le vecteur de Poynting, et l'énergie moyenne volumique, et les pertes par effet joule en valeur moyenne.

$$(\vec{\Pi} = \vec{0}, \langle U_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \text{ et } \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \vec{0})$$

5.2 Onde transversale dans les plasmas

On étudie dans cette partie l'effet d'une onde électromagnétique $\vec{E}_1 = E_1(x, t)\vec{u}_x = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$, \vec{B}_1 .

Cette onde met en mouvement les charges et on note $\vec{v}_e = \vec{v}_{1,e}(x, t)\vec{u}_x$ la vitesse des électrons et $\vec{v}_p = \vec{v}_{1,p}(x, t)\vec{u}_x \simeq 0$ puisque comme dans la partie précédente la vitesse des protons peut être négligé devant celle des électrons.

De plus, cette onde modifie a priori la répartition spatiaux-temporelle des charges de telle sorte que le nombre de charges par unité de volume en présence de l'onde s'écrit pour les électrons $n_e = n_0 + n_{1,e}(x, t)$.

Tous les champs d'ordre 1 introduits sont des infiniments petits du même ordre et on se limite à l'ordre 1 en cet infiniment petit.

1. Montrer que le plasma reste localement neutre à partir des équations de Maxwell, soit $n_{1,e} = 0$ (la répartition de charge reste uniforme, n_0)
2. Montrer que

$$\vec{B}_1 = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$$

3. En justifiant brièvement que l'on peut négliger la force magnétique devant la force électrique, étudier le mouvement de l'électron.

En déduire que la conductivité complexe du plasma :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma} \vec{E} \text{ avec } \underline{\sigma} = \frac{n_0 e^2}{j m_e \omega}$$

Qu'en déduire pour la puissance dissipée par effet Joule (puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge) ?

$$(\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \vec{0})$$

4. Montrer que la relation de dispersion est

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e}$$

5. Pour qu'une onde progressive puisse exister, montrer qu'il faut que

$$\omega > \omega_C = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}}$$

6. Calculer alors la vitesse de phase et de groupe en fonction de ω et ω_C . Commenter.

$$(v_{\text{varphi}} = c \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_C^2}} \text{ et } v_g = c \sqrt{\omega^2 - \omega_C^2})$$

7. Interpréter le comportement haute fréquence.

(A trop haute fréquence, l'inertie des e^- les empêchent de bouger et le milieu se comporte alors comme le vide)

Les ondes radio modulées en amplitude (AM) ont une fréquence inférieure à la fréquence de coupure de la ionosphère. Ces ondes sont donc totalement réfléchies par la ionosphère et ainsi il est possible d'entre radio Londres de France (La propagation en ligne droite ne suffisant pas.) Par contre, pour la FM, qui utilise des fréquences plus élevées supérieures à la fréquence de coupure, les ondes traversent la ionosphère ce qui limite la portée de ces ondes...

Chapitre 6

Problème de révision : onde sonore sphérique.

Une sphère pulsante de centre O a un rayon $a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$. Cette onde émet une onde sonore tel que $a_1 \ll a_0 \ll \lambda$.

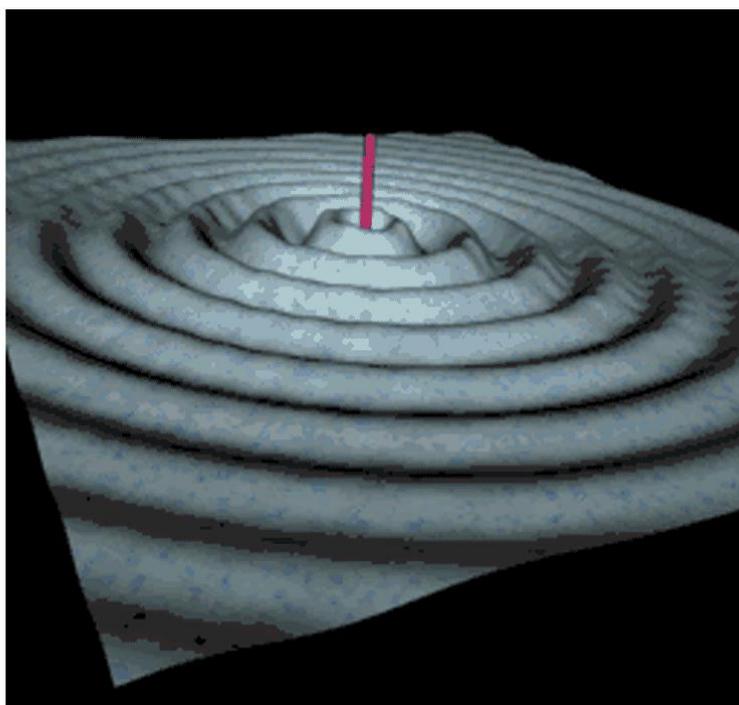


FIGURE 6.1 – Onde sphérique à deux dimension. (La boucle est bouclée)

1. A partir des symétries du problème, justifier qu'en coordonnées sphériques, l'onde sonore va être décrit par des champ de la forme suivante :

Pour la pression, $p_1(M, t) = p_1(r, t)$

Pour la vitesse, $\vec{v}_1(M, t) = v_1(r, t)\vec{u}_r$

2. Rappeler sans démonstration l'équation de d'Alembert dont est solution la pression p_1 .

Pour un champ scalaire $f(r, t)$ ne dépendant ni de θ , ni de φ en coordonnées sphériques, le Laplacien est $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r.f}{\partial r^2}$

3. Justifier alors que le champ de pression sonore peut s'écrire $p_1(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - k.r - \alpha)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$.
4. Déterminer l'expression de la vitesse \vec{v}_1 .
 Montrer qu'en champ proche, pour $r \ll \lambda$, $\vec{v}_1(r, t) = \frac{A}{\mu_0 \omega r^2} \sin(\omega t - k.r - \alpha)$
 Montrer que dans la zone de rayonnement, pour $r \gg \lambda$, $\vec{v}_1(r, t) = \frac{k.A}{\mu_0 \omega r} \cos(\omega t - k.r - \alpha)$
5. Justifier que la condition au limite sur la sphère peut s'écrire $v_1(r = a_0, t) = \dot{a}$. En déduire A et α .
 ($A = \mu_0 \omega^2 a_0^2 a_1$ et $\alpha = \pi - k a_0$)
6. Calculer la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon $r \gg \lambda$. Commenter alors la dépendance en $\frac{1}{r}$ des champs dans la zone de rayonnement. Un son aigu est il mieux rendu ou moins bien rendu qu'un son grave par ce "haut-parleur".
 ($\langle P \rangle = \frac{2\pi \mu_0 \omega^4 a_0^4 a_1^2}{c}$, les sons aigus sont mieux rendus. Pour palier ce problème dans les enceintes de bonne qualité, une partie spéciale est conçue pour mieux rendre les graves)

Chapitre 7

Interférences

L'optique géométrique (programme de 1ère année CPGE) permet de prédire le trajet de la lumière, c'est à dire la direction de propagation de l'onde (ou du vecteur de Poynting associé) dans le cas où l'indice $n(M)$ du milieu traversé varie très peu à l'échelle de la longueur d'onde λ ($\lambda \in [400nm, 800nm]$ pour le visible) mais elle ne permet pas de comprendre le phénomène d'interférence et de diffraction.

Noter aussi que les phénomènes d'interférences et de diffraction ne sont pas limités au seul domaine de l'optique mais peuvent être observés pour toutes les ondes. Penser en particulier aux ondes sonores pour lesquels il suffit simplement d'adapter les dimensions à la longueur d'onde étudiée.

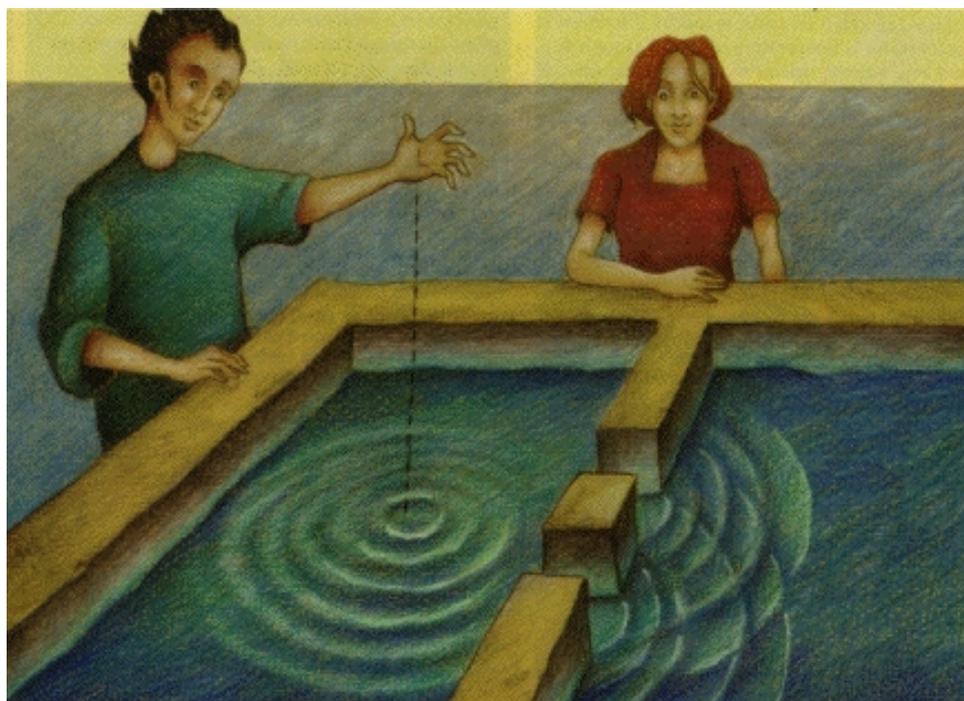


FIGURE 7.1 – Les fentes d'Young en onde capillaire : interférence et diffraction en vue d'artiste.

7.1 Modèle scalaire de l'onde, intensité lumineuse.

La lumière émise par une source lumineuse va être décrite par un champ scalaire $a(M, t)$ de la forme suivante, d'après l'analyse de Fourier $a(M, t) = a_0 \cos(\omega(t - \tau_{[SM]}) + \varphi)$ où $\tau_{[SM]}$ désigne le temps nécessaire pour aller du point source S au point M.

Il faut exprimer ce retard de la propagation $\tau_{[SM]}$ et nous cherchons à l'écrire comme $\tau_{[SM]} = \frac{[SM]}{c_0}$ où c_0 désigne la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique dans le vide. $[SM]$ désigne le chemin optique, qui est le trajet de la lumière du point source S au point M d'observation dans le milieu d'indice $n(P)$.

$$[SM] = \int_P^M \frac{\vec{k}}{k_0} \cdot d\vec{r}(P) = \int_P^M n(P) \vec{u} \cdot d\vec{r}(P)$$

Le trajet optique est la "longueur" du trajet optique de la lumière dans le milieu d'indice $n(p)$. Pour une onde se propageant en ligne droite dans un milieu homogène d'indice n : $[SM] = n \cdot SM$.

Ainsi

$$a(M, t) = a_0 \cos(\omega t - k_0[SM] + \varphi) = a_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}[SM] + \varphi)$$

Néanmoins, la grandeur détectable n'est pas l'onde elle-même qui varie trop rapidement ($f \simeq 10^{15} Hz$) : les détecteurs de type photodiodes ou l'oeil sont sensibles à l'éclairement $\epsilon(M)$, moyenne quadratique de $a(M, t)$.

$$\epsilon(M) = 2 \cdot \langle a^2(M, t) \rangle_T$$

où $\langle a(M, t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_T a^2(M, t) dt$ est la valeur moyenne temporelle.

7.2 Condition de cohérence des ondes.

Intéressons nous maintenant à la superposition de deux ondes lumineuses.

$$a_1(M, t) = a_{10} \cos(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_1 + \varphi_1) \text{ et } a_2(M, t) = a_{20} \cos(\omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_2 + \varphi_2)$$

$$a_{tot}(M, t) = a_1(M, T) + a_2(M, t)$$

$$\epsilon_{tot}(M) = 2 \cdot \langle a_{tot}^2(M, t) \rangle_T$$

$$\epsilon_{tot}(M) = 2 \langle a_1^2(M, T) + a_2^2(M, t) + 2 \cdot a_1(M, T) \cdot a_2(M, t) \rangle_T$$

$$\epsilon_{tot}(M) = 2 \langle a_1^2(M, T) \rangle + 2 \cdot \langle a_2^2(M, t) \rangle + 4 \cdot \langle a_1(M, T) \cdot a_2(M, t) \rangle_T$$

$$\epsilon_{tot}(M) = a_{10}^2 + a_{20}^2 + 4 \cdot \langle a_1(M, T) \cdot a_2(M, t) \rangle_T$$

$$\epsilon_{tot}(M) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_{1,2}(M)$$

$\epsilon_{1,2}(M)$ est le terme de corrélation ou terme d'interférence.

Si les deux ondes sont **cohérentes** entre elles, $\epsilon_{1,2} \neq 0$.

Si les deux ondes sont **incohérentes** entre elles, $\epsilon_{1,2} = 0$, elles n'interfèrent pas.

Calculons donc plus en détails ce terme :

$$\epsilon_{1,2}(M) = 4. \langle a_1(M, T).a_2(M, t) \rangle_T$$

$$\epsilon_{1,2}(M) = 4. \langle a_{0\ 1} \cos(\omega_1 t - \frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_1 + \varphi_1).a_{2\ 0} \cos(\omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_2 + \varphi_2) \rangle_T$$

$$\epsilon_{1,2}(M) = 2.a_{0\ 1}.a_{0\ 2} \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - (\frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_1 + \varphi_1 + \frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_2 + \varphi_2)) \rangle_T + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - (\frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_1 + \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_2 - \varphi_2)) \rangle_T$$

Le premier terme de la somme est de valeur moyenne nulle. Donc :

$$\epsilon_{1,2}(M) = 2.a_{0\ 1}.a_{0\ 2} \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - (\frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_1 + \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_2 - \varphi_2)) \rangle_T$$

Le terme restant est de valeur moyenne non nulle si dans un premier temps $\omega_1 = \omega_2$ **premier critère de cohérence**. $\epsilon_{1,2}(M) = 2.a_{0\ 1}.a_{0\ 2} \langle \cos((\frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_1 + \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda_0}[SM]_2 - \varphi_2)) \rangle_T$

Ce terme est de valeur moyenne non nulle si la phase ne varie pas au cours du temps. Or la lumière émise par une lampe est émise par train d'onde. La phase varie aléatoirement d'un train d'onde à un autre train d'onde. Il faut donc que la lumière provienne d'un seul et même train d'onde pour que les deux ondes puissent être cohérente et donc interférer. Ceci impose que **la lumière provienne d'une seule et même source**, deuxième critère de cohérence.

De plus la différence de chemin optique ne doit pas être trop importante afin que la lumière reste issu du même train d'onde. D'où finalement $[SM]_1 - [SM]_2 < l^* = c_0.t^* >$ où t^* est la durée du train d'onde et l^* la longueur déduite de t^* , appelée **longueur de cohérence**, ce qui constitue le troisième et dernier critère de cohérence.

$$\epsilon_{1,2} = 2.a_{0\ 1}.a_{0\ 2} \langle \cos((\frac{2\pi}{\lambda_0}([SM]_1 - [SM]_2)) \rangle_T.$$

Au final, nous retiendrons que :

$$\epsilon_{tot}(M) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_{1,2}(M)$$

avec

$$\epsilon_{1,2}(M) = 2.\sqrt{\epsilon_1}.\sqrt{\epsilon_2} \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}([SM]_1 - [SM]_2)) = 2.\sqrt{\epsilon_1}.\sqrt{\epsilon_2} \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M))$$

Le terme de cohérence est non nul si et seulement si les trois conditions de cohérences sont remplies :

- les deux ondes ont même pulsation $\omega_1 = \omega_2$
- les deux ondes sont issues d'une même source
- la différence de chemin optique notée $\delta(M) = [SM]_1 - [SM]_2 < l^*$

Le cas où les deux ondes ont même amplitude $a_{0\ 1} = a_{0\ 2} = a_0$ donc même éclairement $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ est le cas le plus fréquemment rencontré.

$$\epsilon_{tot}(M) = 2.\epsilon_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}([SM]_1 - [SM]_2))) = 2.\epsilon_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)))$$

Reformulation du problème des interférences :

Si deux ondes sont cohérentes, il faut sommer les amplitudes des ondes puis calculer l'éclairement pour faire apparaître le terme d'interférences.

Si deux ondes sont incohérentes, il suffit de sommer les éclaircements des ondes, car elles n'interfèrent pas. (cas des expériences usuelles).

Pour observer des interférences, les conditions de cohérences sont très strictes , ce qui fait que l'observation d'interférences n'est pas une chose aisée, très peu courante dans la vie de tous les jours.

Ainsi quand vous allumez deux lampes, elles sont incohérentes et donc $\epsilon_{tot} = \epsilon_1 + \epsilon_2$, l'éclairement totale est la somme des éclairagements (c'est en général la raison qui pousse à allumer une seconde lampe).

Pour observer les interférences au laboratoire, il faut donc que la lumière soit issue d'une même lampe mais que le chemin optique soit différent pour les deux ondes et varie en fonction de M . Il faut donc un dispositif pour diviser l'onde en deux ondes.

Enfin la différence de chemin optique doit être faible pour que $\delta(M) = [SM]_1 - [SM]_2 < l^*$.

Même en laboratoire, il n'est donc pas aisée de les observer sauf peut être avec un laser car la lumière émise par un laser est très cohérente (l^* est grand).

Remarque 1 :

Le contraste $C = \frac{\epsilon_{max} - \epsilon_{min}}{\epsilon_{max} + \epsilon_{min}}$ (compris entre 0 et 1) est maximal, égal à 1 si les deux amplitude des deux ondes sont égales et tend vers 0 si les amplitudes sont très différentes.

Remarque 2 :

Nous avons eu recours dans les chapitres précédents à la notion de complexe associée à une OPPH.

$$a(M, t) = a_0 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} [SM] + \varphi) \rightarrow \underline{a}(M, t) = a_0 \exp j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} [SM] + \varphi).$$

Les règles d'utilisations des complexes sont les suivantes :

- Pour des ondes cohérentes, il faut sommer les amplitudes complexes. Pour des ondes cohérentes, $\underline{a}_{tot}(M, t) = \sum a_i(M, t)$
- L'éclairement se calcule de la manière suivante $\epsilon_{tot}(M) = |\underline{a}_{tot}(M, t)|^2 = \underline{a}_{tot}(M, t) \cdot \underline{a}_{tot}^*(M, t)$ où * désigne alors le complexe conjugué.

Le calcul à partir de ces formules montre que les résultats sont identiques à ceux obtenus à ceux menés en réel pour des ondes cohérentes.

7.3 Interféromètre à division du front d'onde.

La première méthode pour obtenir à partir d'une même source deux chemins optiques différents est la division du front d'onde. la surface de l'onde est divisée en deux. Plusieurs interféromètres reposent sur ce principe : les miroirs de Fresnel et les trous d'Young (ou fente d'Young) par exemple.

Pour l'expérience des trous d'Young, une source ponctuelle S est située loin d'un écran percé de deux trous I_1 et I_2 distants de a et l'observation s'effectue à une distance $D \gg a$.

$$\delta(M) = [SM]_1 - [SM]_2$$

$$\delta(M) = (SI_1 + I_1M) - (SI_2 + I_2M)$$

$$\delta(M) = I_1M - I_2M \text{ car } SI_1 = SI_2$$

$$\delta(M) \simeq a \cdot \tan(\alpha) \text{ d'après le plan d'onde fictif.}$$

$$\delta(M) \simeq a \cdot \alpha \simeq a \frac{x}{D} \text{ dans l'approximation des petits angles.}$$

Remarque :

Il est aussi possible de faire un DL de $\delta(M) = I_1M - I_2M$ ($I_1M = \sqrt{I_1^2 + I^2 M^2}$) ce qui montre alors de manière plus rigoureuse (puisque l'on maîtrise mieux l'approximation) que $\delta(M) \simeq a \frac{x}{D}$.

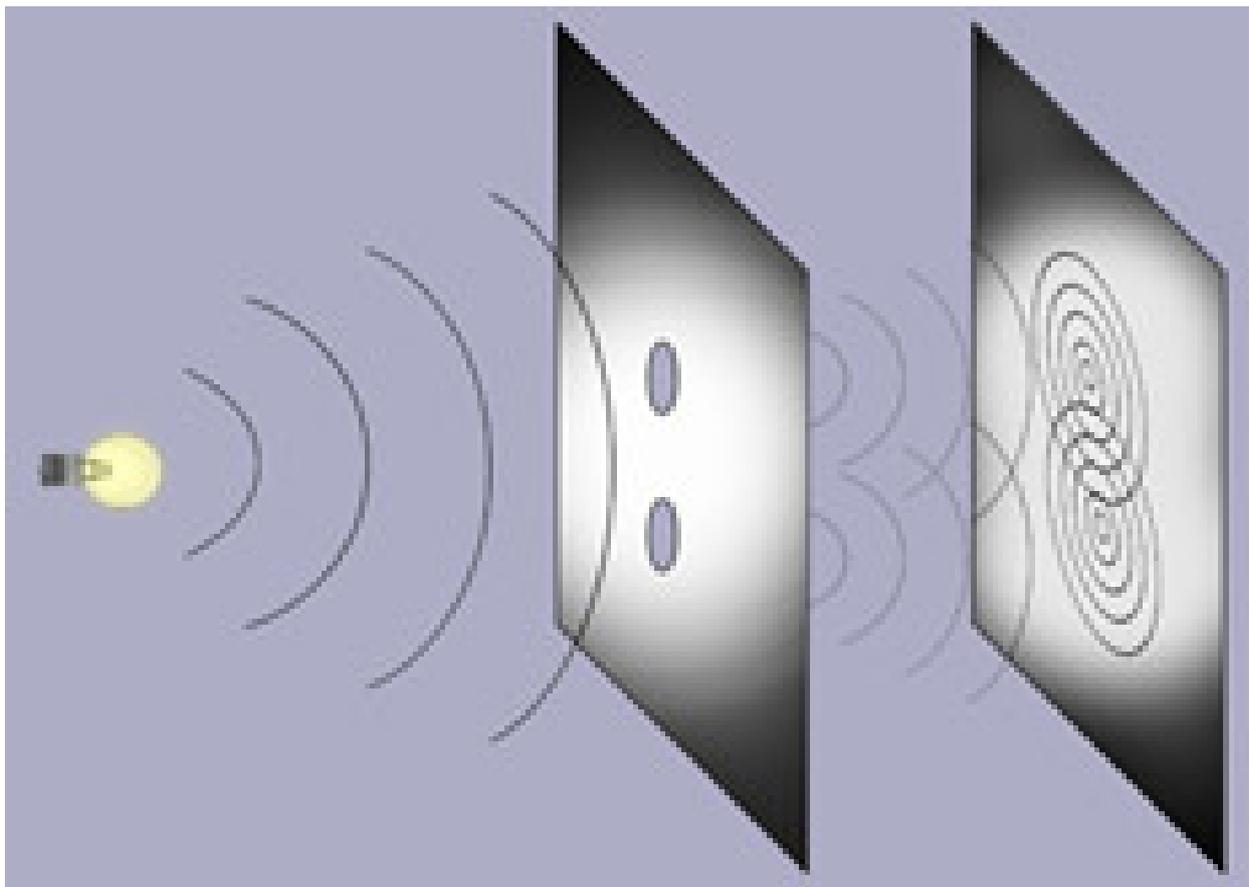


FIGURE 7.2 – Les fentes d'Young : division du front d'onde.

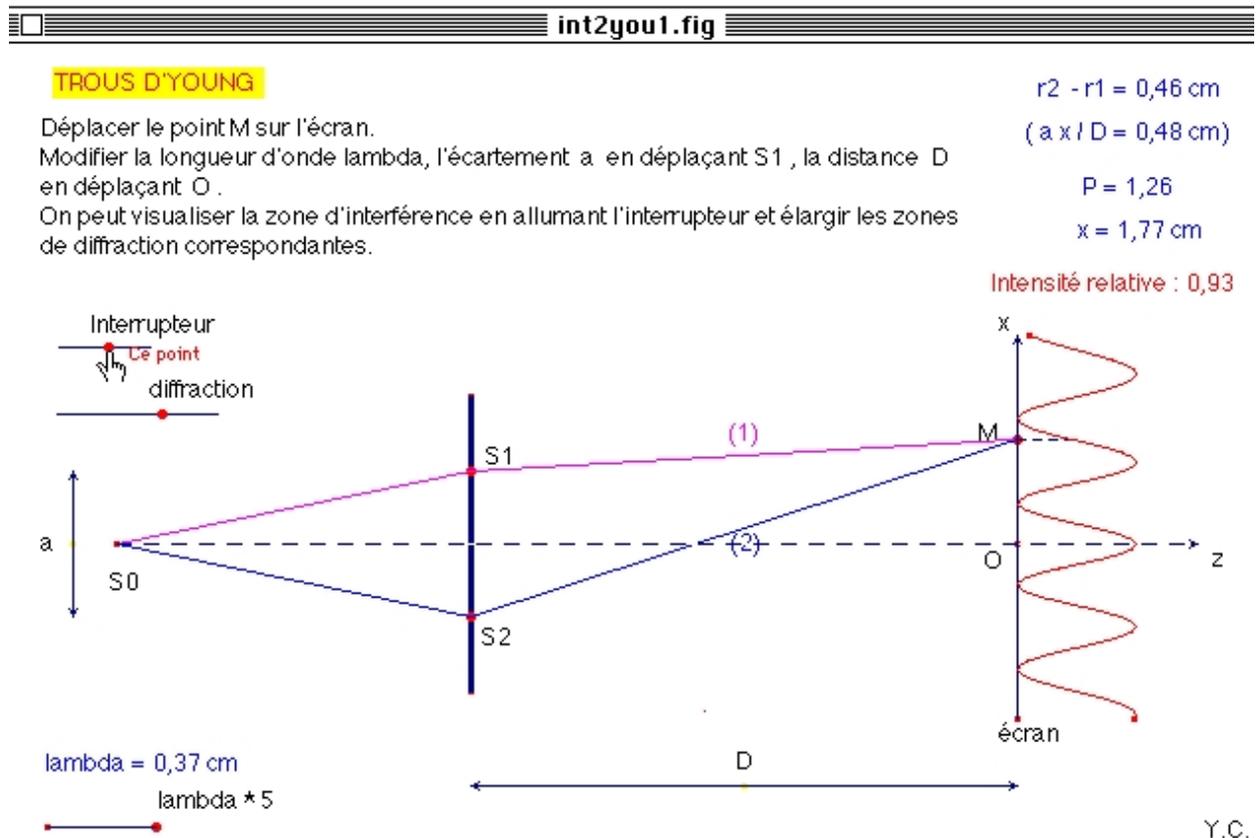


FIGURE 7.3 – Différence de Marche dans le dispositif d'Young et la figure d'interférence.

$$\delta(M) = SO_1M - SO_2M = a \frac{x}{D}$$

$$\epsilon_{tot} = 2.\epsilon_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M))) = 2.\epsilon_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}a \frac{x}{D}))$$

7.4 Interféromètre à division d'amplitude.

La seconde méthode pour obtenir à partir d'une même source deux chemins optiques différents est la division d'amplitude. A l'aide d'une séparatrice, on divise l'amplitude de l'onde en deux ondes (si possible de même intensité). La lame d'air, le Michelson ou le Fabry Perrot sont des interféromètres à division d'amplitude.

7.4.1 La lame d'air

Etudions d'abord la lame d'air d'épaisseur e pour un rayon arrivant sous une incidence i (repéré comme il se doit par rapport à la normale) et des rayons interférant à l'infini.

$$\delta(M) = [SM]_1 - [SM]_2$$

$$\delta(M) = (SI_1 + I_1M) - (SI_2 + I_2M)$$

$$\delta(M) = (S_1I_1 + I_1M) - (S_2I_2 + I_2M)$$

$$\delta(M) = (S_1M) - (S_2M)$$

$$\delta(M) = 2.e.\cos(i)$$

7.4.2 Présentation de l'interféromètre de Michelson.

Il est constitué d'une séparatrice S_p qui est une lame semi réfléchissante (50% de la lumière est réfléchi et 50% de la lumière est transmise), de deux miroirs plans M_1 et M_2 . L'onde issue de S est divisée en amplitude sur la séparatrice et la moitié de la lumière, réfléchi par la séparatrice, se dirige donc sur M_1 alors que l'autre moitié transmise par la séparatrice, est dirigée suivant M_2 .

L'onde 1 après réflexion sur M_1 traverse la séparatrice pour se diriger vers la zone d'observation, alors que l'onde 2 après réflexion sur M_2 est elle réfléchi par la séparatrice pour se diriger elle aussi vers la zone d'observation.

Dans le Michelson, une compensatrice C_p est aussi présente puisque les deux ondes ne traversent pas le même nombre de fois le verre de la séparatrice. La compensatrice est donc ajoutée sur le trajet

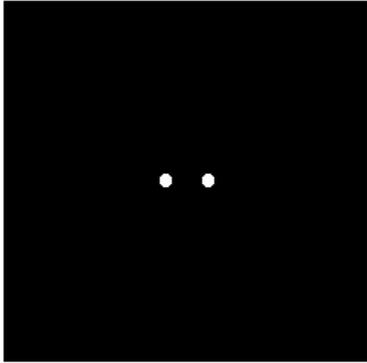
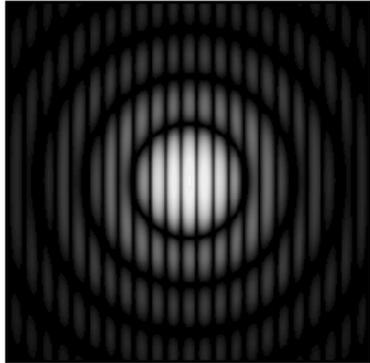
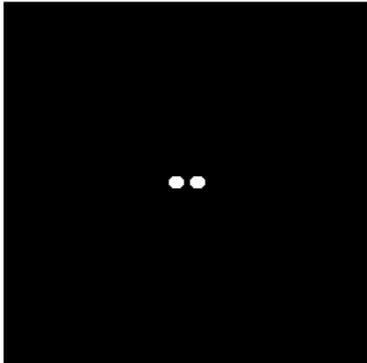
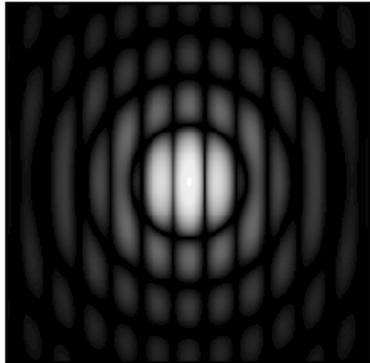
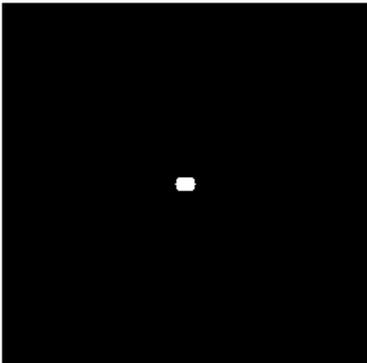
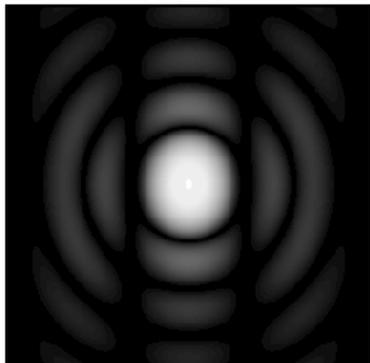
	Ecran	Tache de diffraction
$D=3a$		
$D=1.5a$		
$D=\frac{a}{2.44}$		

FIGURE 7.4 – Les trous d'Young : Influence de a sur la figure d'interférence.

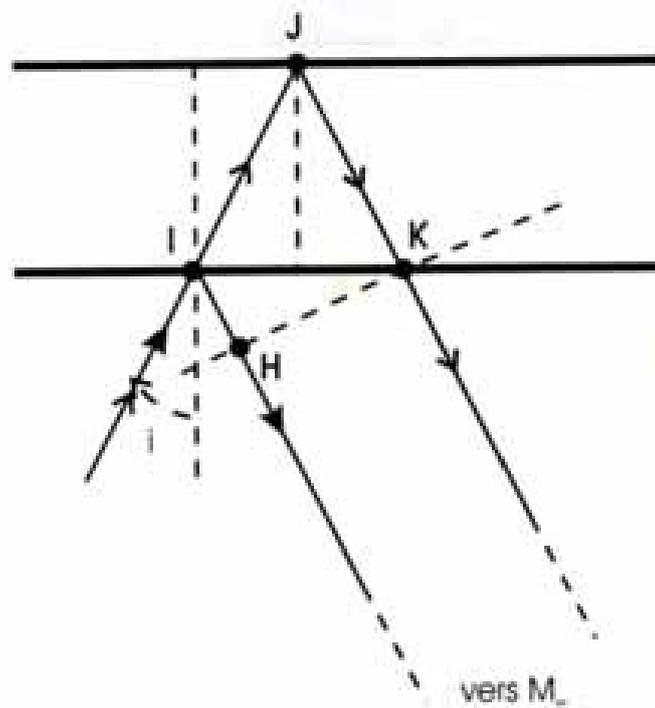


FIGURE 7.5 – La lame d’air.

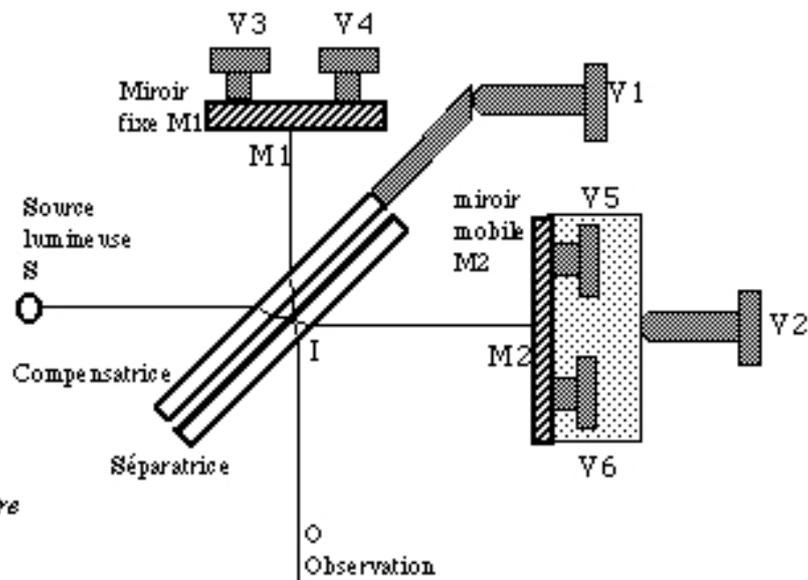


Figure 1 :
Schéma de
l'interféromètre
de Michelson

FIGURE 7.6 – Interféromètre de Michelson.

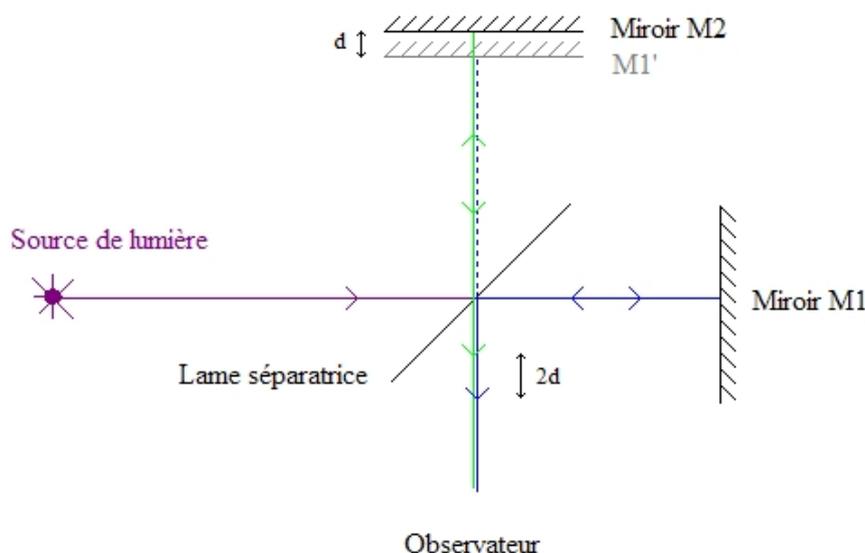


FIGURE 7.7 – Interferomètre de Michelson schématisé.

de l'onde afin qu'il n'y ait aucune différence de marche entre les deux rayons due à la traversée du verre.

7.4.3 Le Michelson en lame d'air.

Lorsque les deux miroirs M_1 et M_2 sont orthogonaux, le michelson est dit en lame d'air. Pour comprendre cette appellation, il faut "déplier" le Michelson. Notons M_2^* l'image de M_2 par la séparatrice (symétrie axiale) et S^* l'image de M_2 par la séparatrice. La situation est alors analogue à celle de la lame d'air. L'épaisseur est alors la distance séparant M_1 et M_2^* .

Avec une source ponctuelle, les franges sont délocalisées (ce qui signifie que les interférences pourraient être observées en tout point de l'espace). Mais **avec une source non ponctuelle comme on en utilise en TP, les franges sont localisées à l'infini**. Une démonstration est certes possible mais il faut le présenter comme le fruit d'une constatation expérimentale. (Nous en donnerons une interprétation à posteriori).

Pour observer ces franges, il faut donc utiliser une lentille convergente et observer les franges dans le plan focal image de la lentille. Il faut aussi face aux étudiants choisir une lentille de forte focale pour obtenir une image de taille observable par tous. Il est possible d'observer à l'oeil ses franges lors du réglage avant de projeter (si la lumière n'est pas la lumière laser).

Dans le cas d'une observation à l'infini la différence de marche est alors :

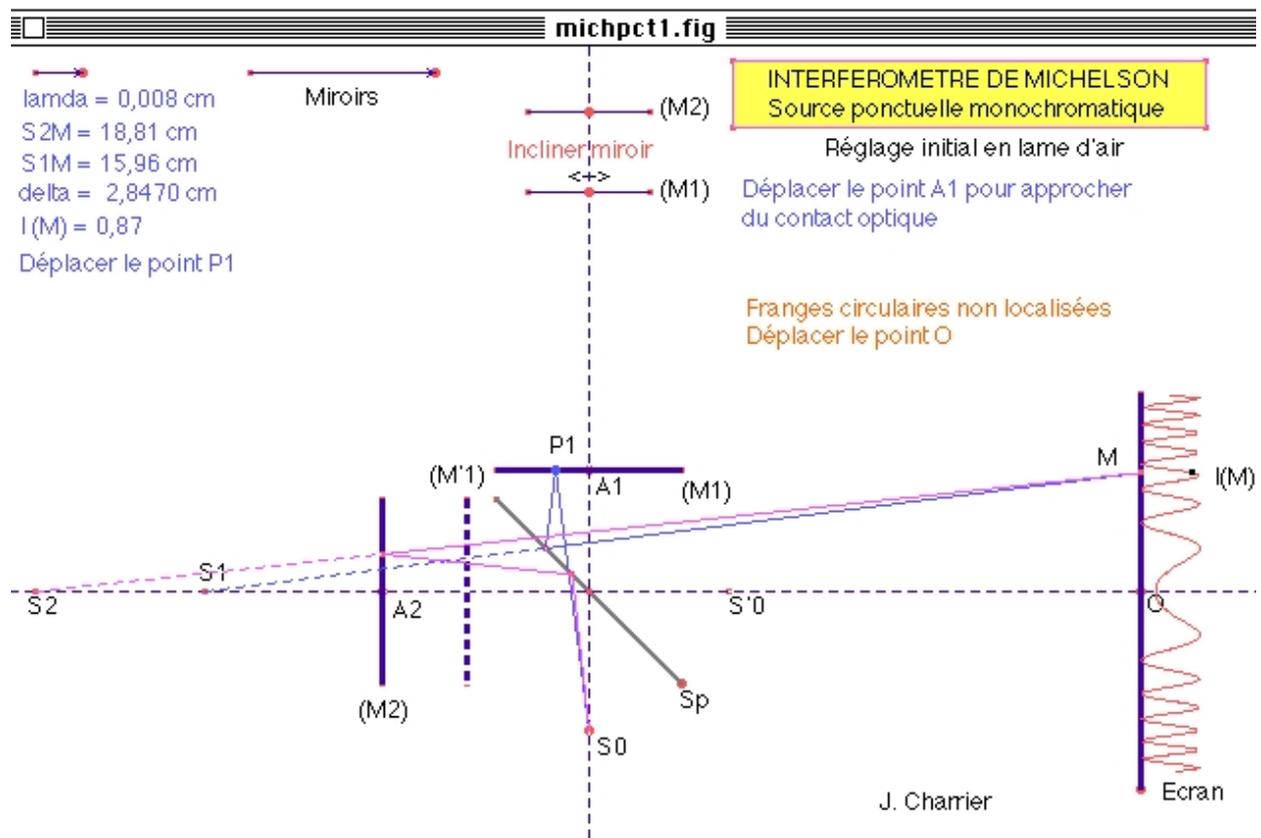


FIGURE 7.8 – Interferomètre de Michelson en lame d’air déplié : différence de marche et éclairement.

$$\delta(M) = S_1M - S_2M = 2.e. \cos(i)$$

$$\epsilon_{tot} = 2.\epsilon_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M))) = 2.\epsilon_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}2.e. \cos(i)))$$

Les franges d'égal éclaircissement sont alors appelés **franges d'égal inclinaison**.

Remarque : La différence de marche est alors indépendante de la position de la source S, ce qui explique que les franges se localisent à l'infini.

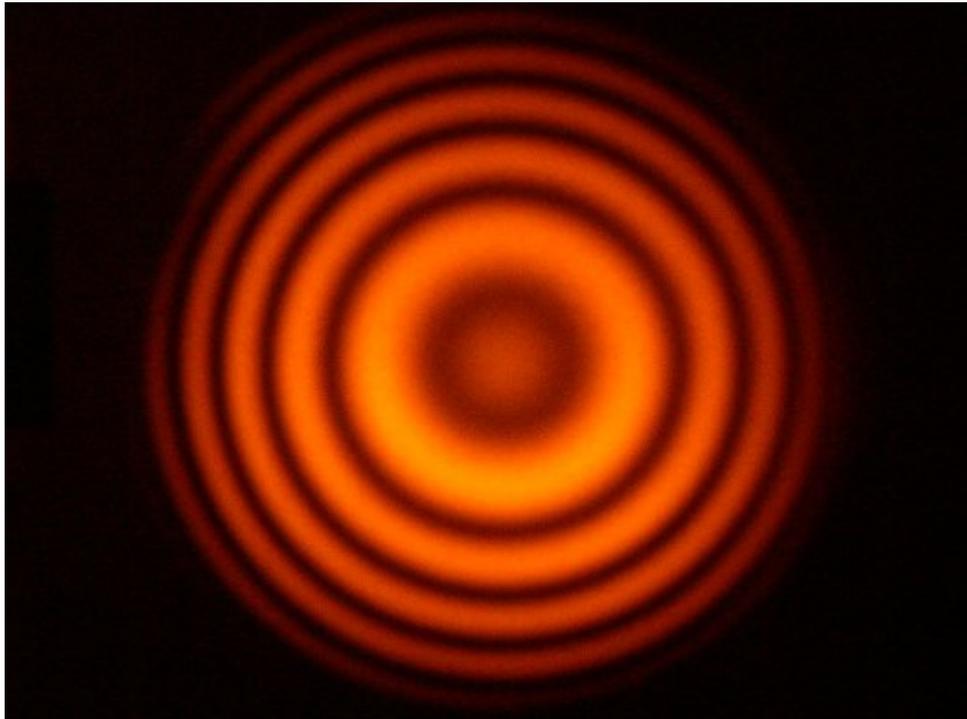


FIGURE 7.9 – Franges d'égal inclinaison de la lame d'air.

7.4.4 Le Michelson en coin d'air.

Lorsque les deux miroirs M_1 et M_2 sont orthogonaux, et que la différence de marche entre les deux miroirs est nulle $e = 0$, ce qui est la situation du contact optique, il est possible d'introduire un petit angle α entre les deux miroirs (ou plus exactement entre M_1 et M_2^*). Le michelson est alors dit en coin d'air.

Avec une source ponctuelle, les franges sont délocalisées (ce qui signifie que les interférences pourraient être observées en tout point de l'espace). Mais **avec une source non ponctuelle comme on en utilise en TP, les franges sont localisées sur les miroirs.**

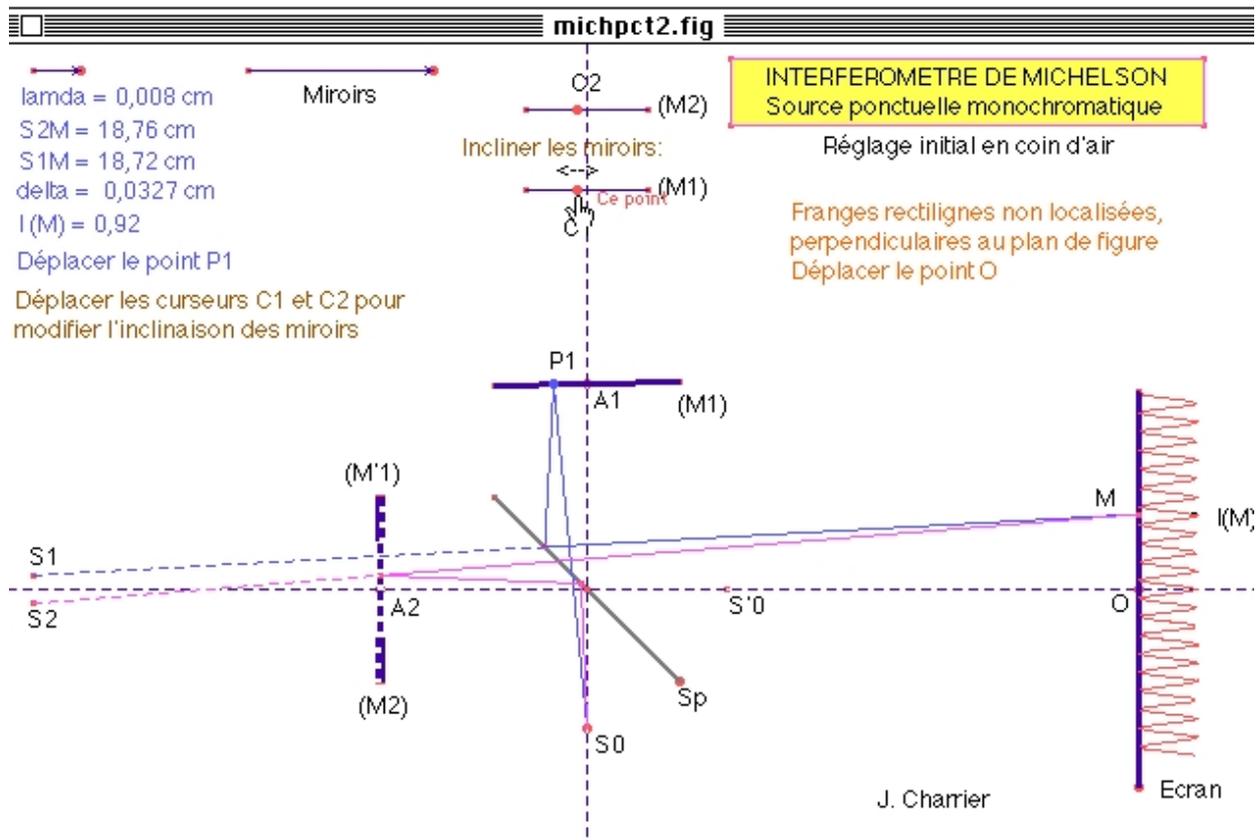


FIGURE 7.10 – Interferomètre de Michelson en coin d’air déplié : différence de marche et éclairement.

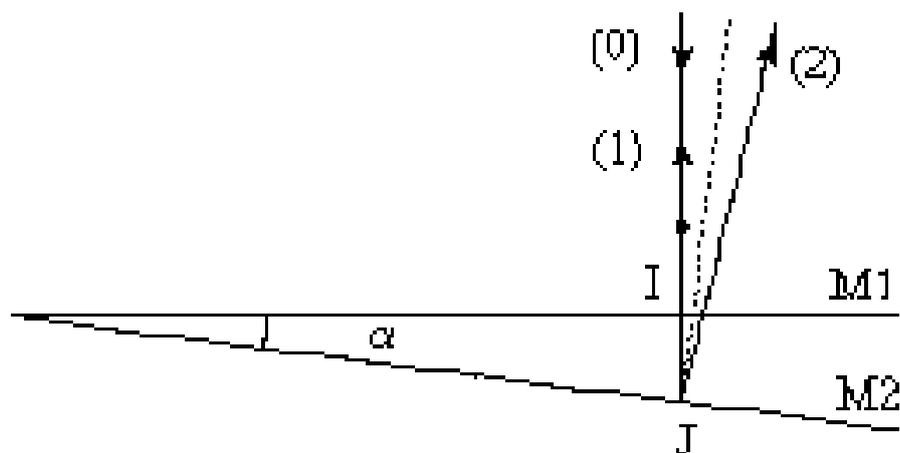


FIGURE 7.11 – Le coin d’air.

Pour observer ces franges, il faut donc utiliser une lentille convergente et placer l'écran à une distance supérieure à $4f'$ pour obtenir une image réelle. Il faut choisir une lentille de petite focale et placer la lentille proche du miroir pour avoir un fort grossissement.

Il est encore une fois possible d'observer à l'oeil ses franges lors du réglage avant de projeter (si la lumière n'est pas la lumière laser).

Dans le cas d'une observation sur les miroirs la différence de marche est alors :

$$\delta(M) = S_1M - S_2M = 2.\alpha x$$

$$\epsilon_{tot} = 2.\epsilon_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M))) = 2.\epsilon_0(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}2.\alpha x))$$

Les franges d'égal éclaircissement sont alors appelés **franges d'égal épaisseur**.

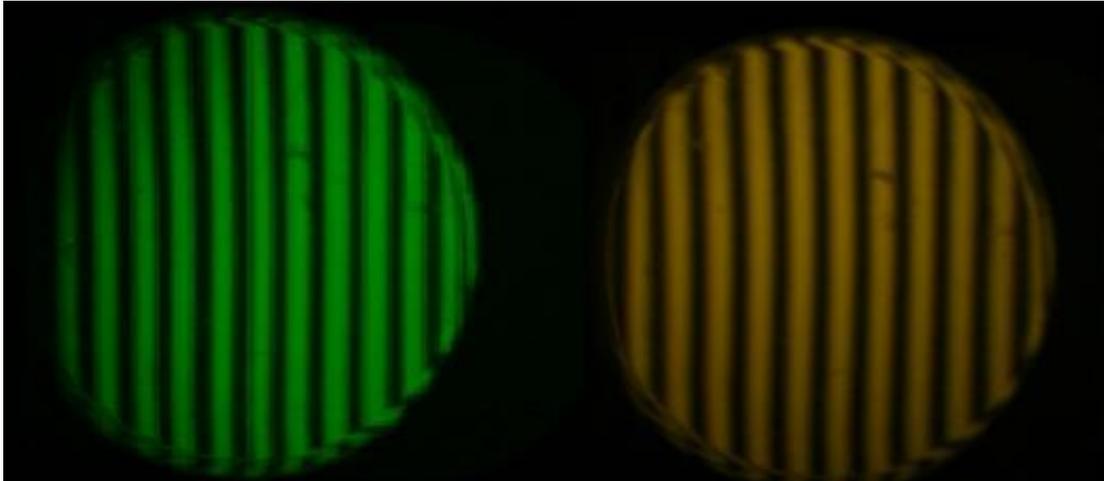


FIGURE 7.12 – Franges d'égal épaisseur du coin d'air.

7.5 Interférence à deux ondes et à N ondes.

7.5.1 Interférence à deux ondes.

En supposant les deux ondes qui interfèrent de même éclaircissement, l'éclaircissement total est :

$$\epsilon_{tot} = 2.\epsilon_0.(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)))$$

La figure d'éclaircissement (avec un contraste de 1) est donc la suivante :

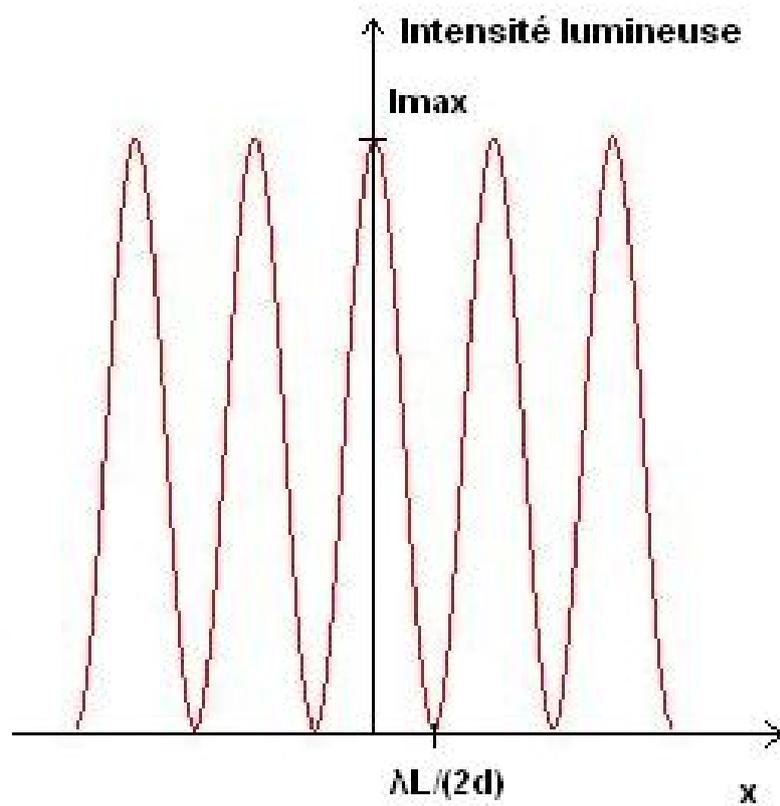


FIGURE 7.13 – Interférence à deux ondes : éclaircissement en fonction de $\delta(M)$.

Notons le maximum d'éclairement de $4\epsilon_0$ et une largeur caractéristique des "pics" d'éclairement de π .

Deux figures d'interférences ont été obtenus pour les interférences à deux ondes. La différence entre les deux situations évoquées est la position du plan d'observation soit perpendiculaire (lame d'air) soit parallèle (coin d'air) aux deux sources fictives, comme le montre la figure ci-dessous.

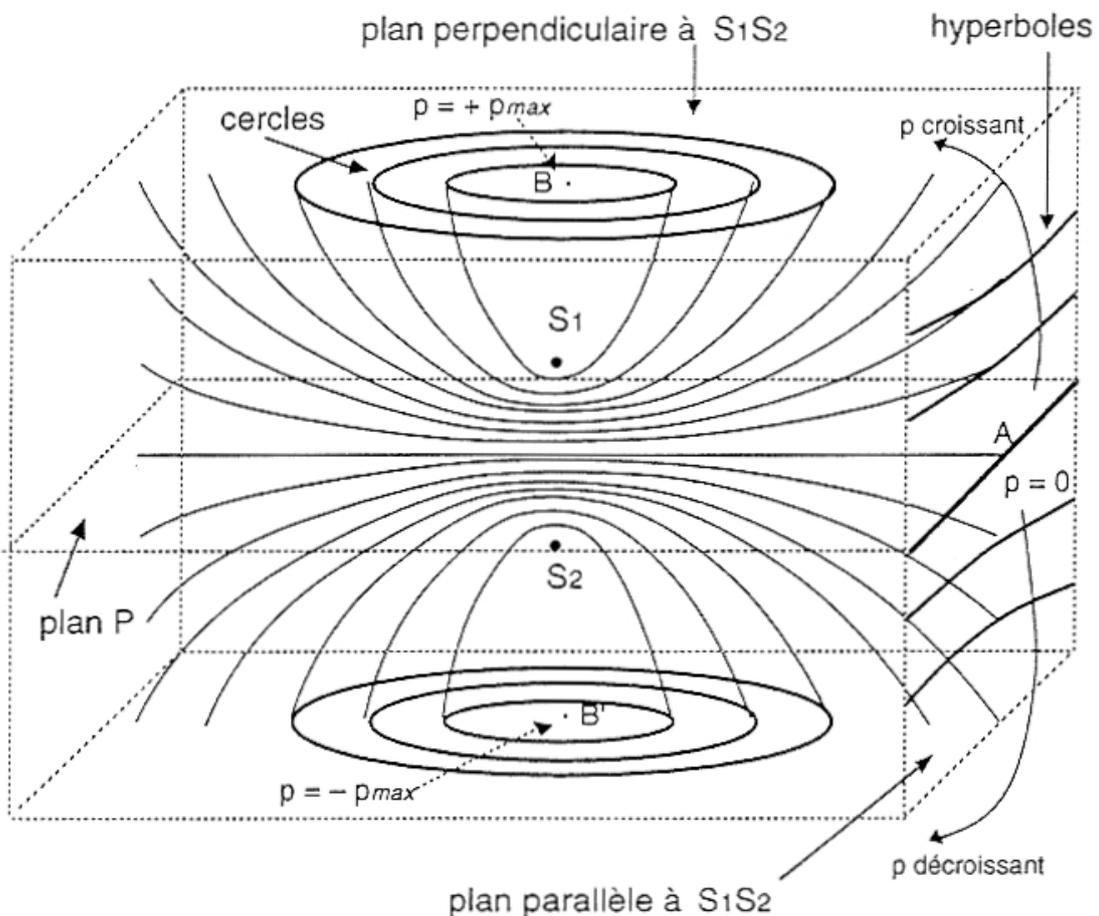


FIGURE 7.14 – Interférence à deux ondes : allures des franges dans l'espace, des anneaux aux franges rectilignes, diverses intersections des hyperboloïdes de révolution.

Enfin, rappelons que les interférences à deux ondes ne se limitent pas au cas des ondes lumineuses, bien que cela soit l'exemple de prédilection de la partie.

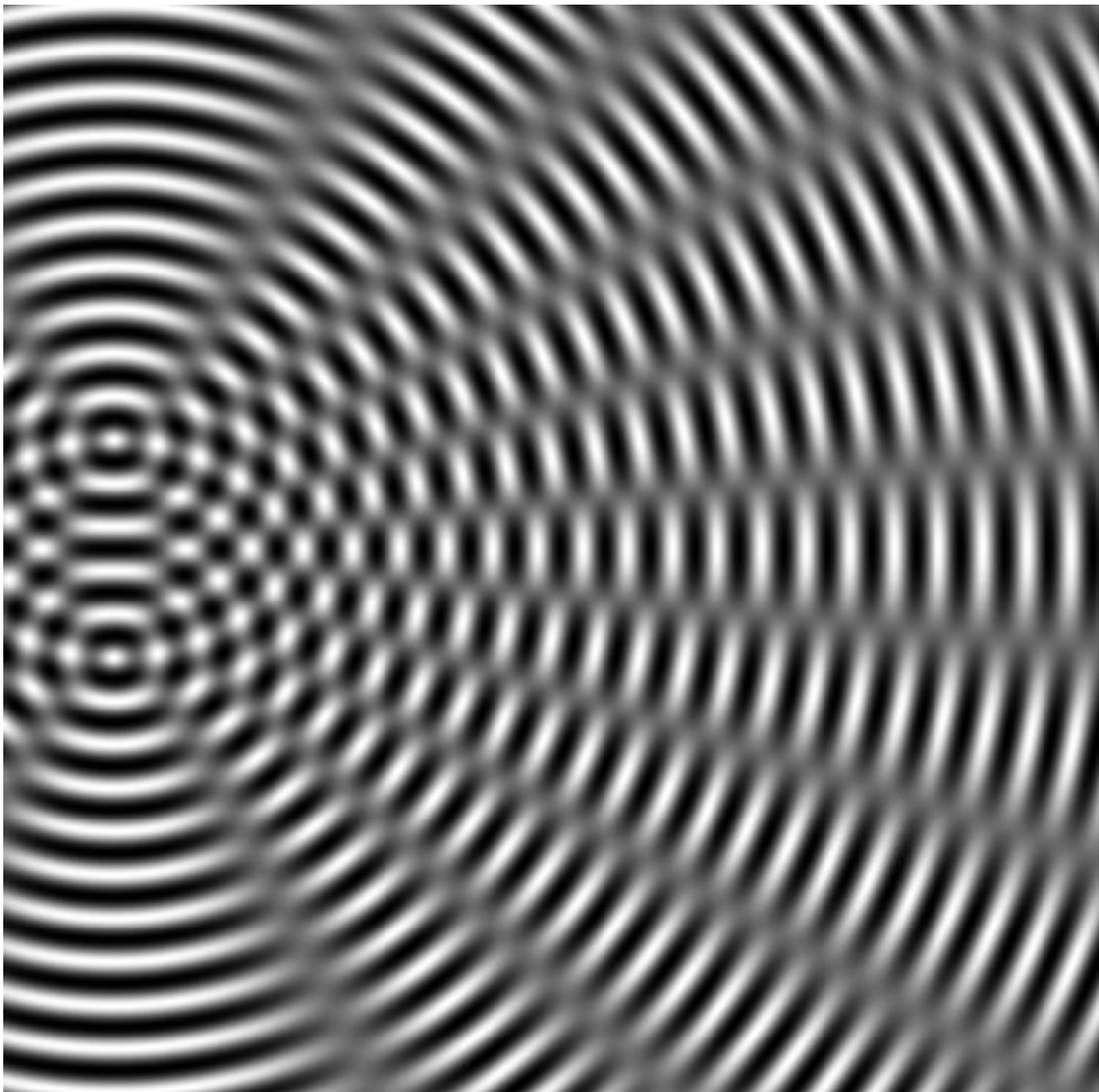


FIGURE 7.15 – Interférence à deux ondes capillaire dans le plan (cuve à onde).

7.5.2 Interférence à N ondes.

Intéressons à un interféromètre de Fabry Perrot, qui est équivalent à une lame d'air (et donc identique à un Michelson en lame d'air) mais où cette fois, un grand nombre d'onde, N , font interférer entre elles.

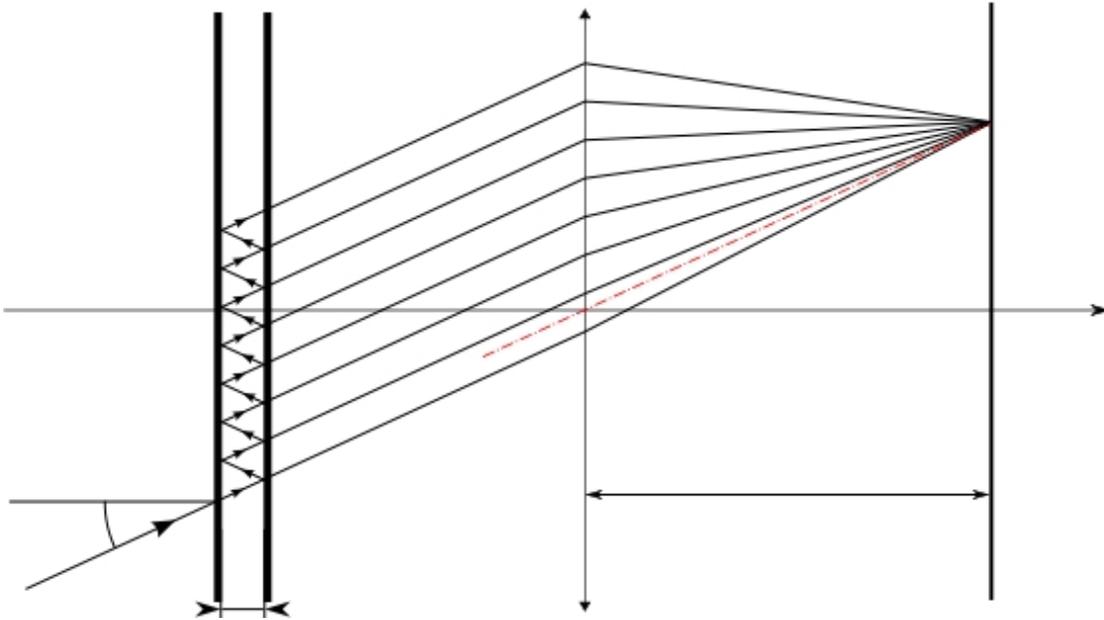


FIGURE 7.16 – Interférence à N ondes dans le Fabry Perrot.

La lumière est issue d'une source S et les interférences sont observées (localisées pour une source étendue) à l'infini, comme pour le Michelson en lame d'air.

Comme les sources sont cohérentes, nous allons passer par les complexes et sommer les amplitudes complexes.

Notons \underline{a}_0 l'amplitude de la première onde qui part à l'infini après réflexion sur la première lame d'air (que l'on prend pour origine des phases. L'onde qui est d'abord transmise par la première, puis réfléchi sur la seconde lame et enfin à nouveau transmise par la première lame pour aller interférer à l'infini est possède une différence de marche $\delta = 2.e. \cos i$ avec l'onde 0, soit un déphasage de $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$. L'amplitude complexe de cette onde est donc $\underline{a}_1 = t^2 r \underline{a}_0 \exp(-j\varphi) = t^2 \underline{a}_0 \exp(-j\varphi)$ car la seconde lame est parfaitement réfléchissante.

L'onde suivante $\underline{a}_2 = r^2 \underline{a}_1 \exp(-j\varphi) = r^2 (t^2) \underline{a}_0 \exp(-j2.\varphi)$

La Nième onde $\underline{a}_N = r^{2.(N-1)} t^2 \underline{a}_0 \exp(-jN.\varphi)$

Au final

$$\underline{a}_{tot} = \sum_0^{\infty} \underline{a}_N$$

$$\underline{a}_{tot} = \sum_0^{\infty} (r^{2.(N-1)} t^2 \underline{a}_0 \exp(-jN.\varphi)$$

$$\underline{a}_{tot} = \underline{a}_0 \cdot t^2 \sum_0^{\infty} r^{2 \cdot (N-1)} \exp(-jN \cdot \varphi)$$

$$\underline{a}_{tot} = \underline{a}_0 \cdot t^2 \frac{1}{1 - r^2 \exp(-j\varphi)}$$

Remarque : la somme n'est pas en toute rigueur une somme à l'infini puisque la longueur de cohérence est finie. Mais comme l'amplitude décroît vite, il n'est pas très grave de rajouter quelques termes de poids très faibles à la somme.

L'éclairement est donc :

$$\epsilon_{tot} = |\underline{a}_{tot}|^2 = \underline{a}_{tot} \cdot \underline{a}_{tot}^*$$

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_0 \cdot t^4 \cdot \frac{1}{(1 - r^2 \cos(\varphi) + r^4 \cdot \sin^2(\varphi))}$$

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_0 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{1 + R^2 - 2 \cdot R \cdot \cos(\varphi)}$$

La figure d'éclairement (avec un contraste de $= \frac{1-R^2}{1+R^2} \simeq 1$) est donc la suivante :

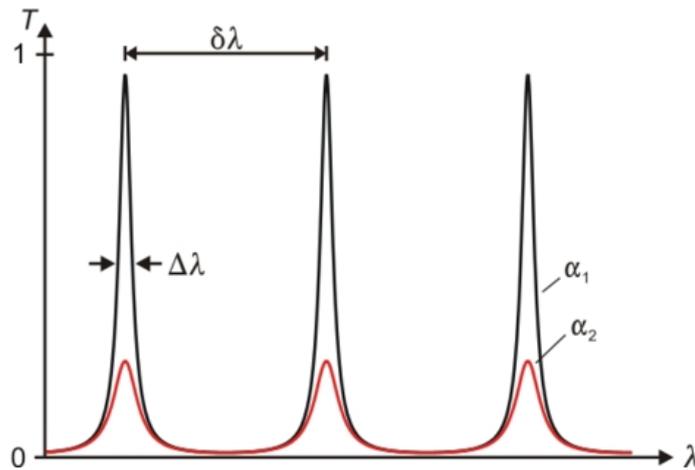


FIGURE 7.17 – Interférence à N ondes, éclairement du Fabry Perot.

Notons le maximum d'éclairement de $N^2 \epsilon_0$ et une largeur caractéristique des "pics" d'éclairement de $\frac{2 \cdot \pi}{N}$.

7.6 Interférence en lumière non monochromatique.

7.6.1 Résolution d'un doublet : battements optiques.

Considérons une lampe spectrale (lampe Sodium ou lampe Mercure) qui possède un doublet : deux pics lumineux très voisins dans le spectre $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq \lambda_m$ tel que $\Delta \lambda \ll \lambda_m$. Ces des sources sont placées face un Michelson en lame d'air.

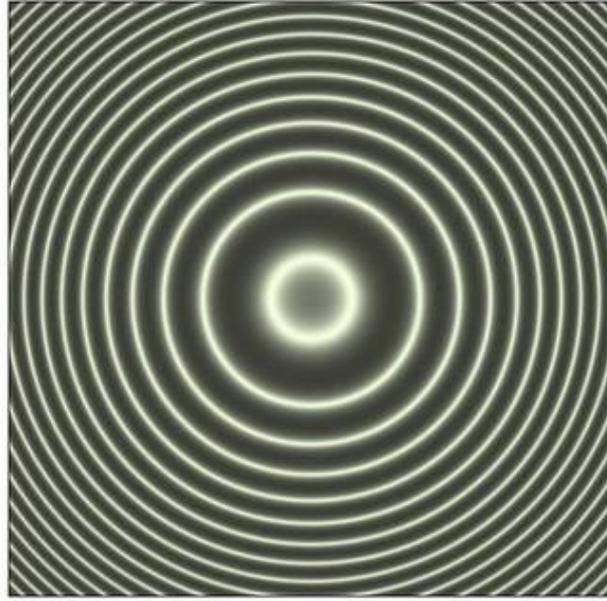


FIGURE 7.18 – Figure d'interférence à N ondes : les anneaux sont très fins.

Comme les deux sources n'ont pas même longueur d'onde, ils ne constituent pas des sources cohérentes. Donc l'éclairement totale est la somme des éclairement ϵ_1 et ϵ_2 (résultant de l'interférence dans le Michelson de chacune des longueurs d'onde) avec $\epsilon_1 = 2.\epsilon_0.(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_1}\delta(M)))$ et $\epsilon_2 = 2.\epsilon_0.(1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_2}\delta(M)))$

L'éclairement résultant est donc :

$$\begin{aligned}\epsilon_{tot} &= 2.\epsilon_0.(2 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_1}\delta(M)) + \cos(\frac{2\pi}{\lambda_2}\delta(M))) \\ \epsilon_{tot} &= 4.\epsilon_0.(1 + \cos(\frac{\pi(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1.\lambda_2}\delta(M)) \cos(\frac{\pi(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1.\lambda_2}\delta(M))) \\ \epsilon_{tot} &= 4.\epsilon_0.(1 + \cos(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\delta(M)) \cos(\frac{2.\pi}{\lambda_m}\delta(M)))\end{aligned}$$

Le premier terme \cos varie très lentement comparé au second terme et l'amplitude de l'éclairement est donc modulé par $\cos(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_m^2}\delta(M))$. Cela revient à dire que ce signal sert d'enveloppe au signal d'interférence usuel ou qu'il joue le rôle d'un facteur de contraste locale.

L'expérience consiste donc à regarder l'évolution de l'éclairement en un point M fixe (en général le centre de la figure d'interférence $i = 0$ donc $\delta(M) = 2.e$) et de regarder l'éclairement évoluer en fonction du chariotage du Michelson (variation de e). La courbe 7.19 est alors obtenue.

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_m^2}{2.\Delta e}$$

7.6.2 Etude en lumière blanche.

Un calcul souvent proposé dans les livres consiste à prendre un profil simple pour la répartition de la densité spectrale. Ce spectre simpliste (mais qui permet de mener le calcul jusqu'au bout) consiste à travailler avec le nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ (ainsi $\epsilon_1 = 2 \cdot \epsilon_0 \cdot (1 + \cos(2\pi\sigma\delta(M)))$) facile à intégrer) et est de prendre un profil rectangulaire (répartition uniforme de l'énergie lumineuse) entre σ_{min} et σ_{max} .

Plutôt que de faire ce calcul, je propose une interprétation graphique. Si deux longueurs d'ondes différentes (deux couleurs différentes) sont superposées, l'éclairement résultant est la superposition (la somme) des deux éclairagements colorés puisque les sources sont incohérentes. La taille des franges diffère puisque la longueur d'onde n'est pas la même, comme le montre la figure 7.20.

La superposition de toutes ces couleurs donne finalement une figure suivante 7.21 (observée dans les fentes d'Young en lumière blanche ou en coin d'air en lumière blanche).

Là où $\delta = 0$ toutes les ondes se superposent et reconstitue le blanc de la source.

Puis les franges sont irisées, on parle de teinte de Newton pour $\delta \simeq 0$.

Finalement, la lumière devient "grise", on parle de blanc d'ordre supérieur, il manque plusieurs longueurs d'ondes au spectre (le spectre serait cannelé).

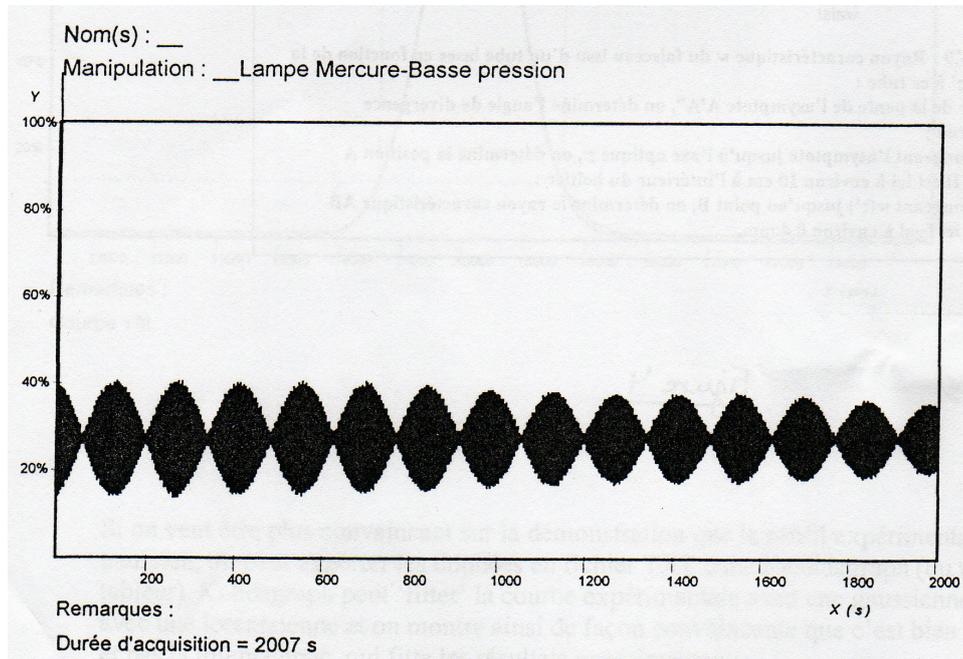


FIGURE 7.19 – Battements optiques : éclairage en un point M fixe en fonction de e épaisseur de la lame d'air.

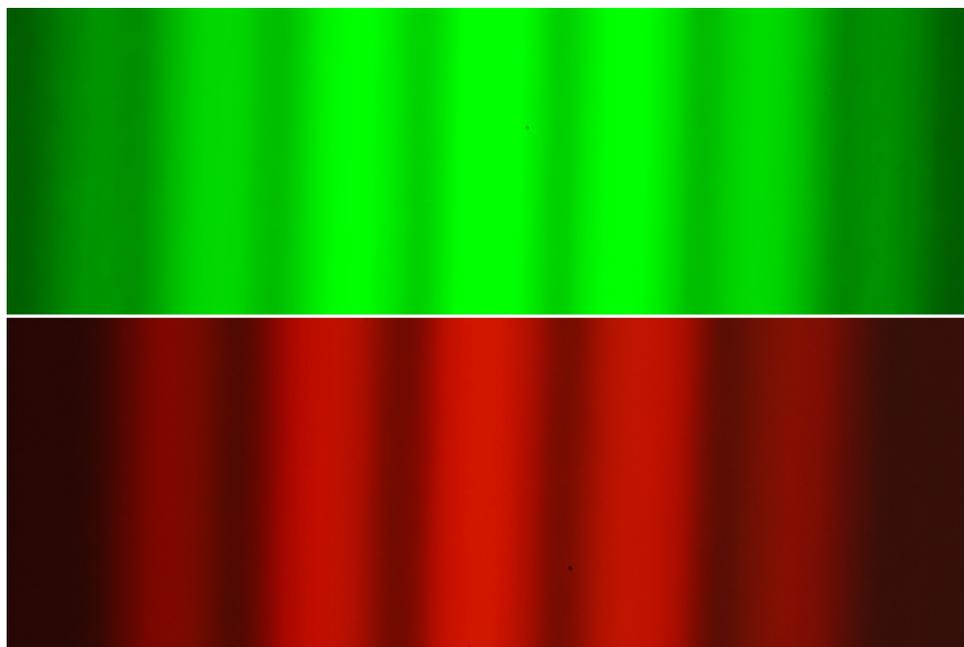
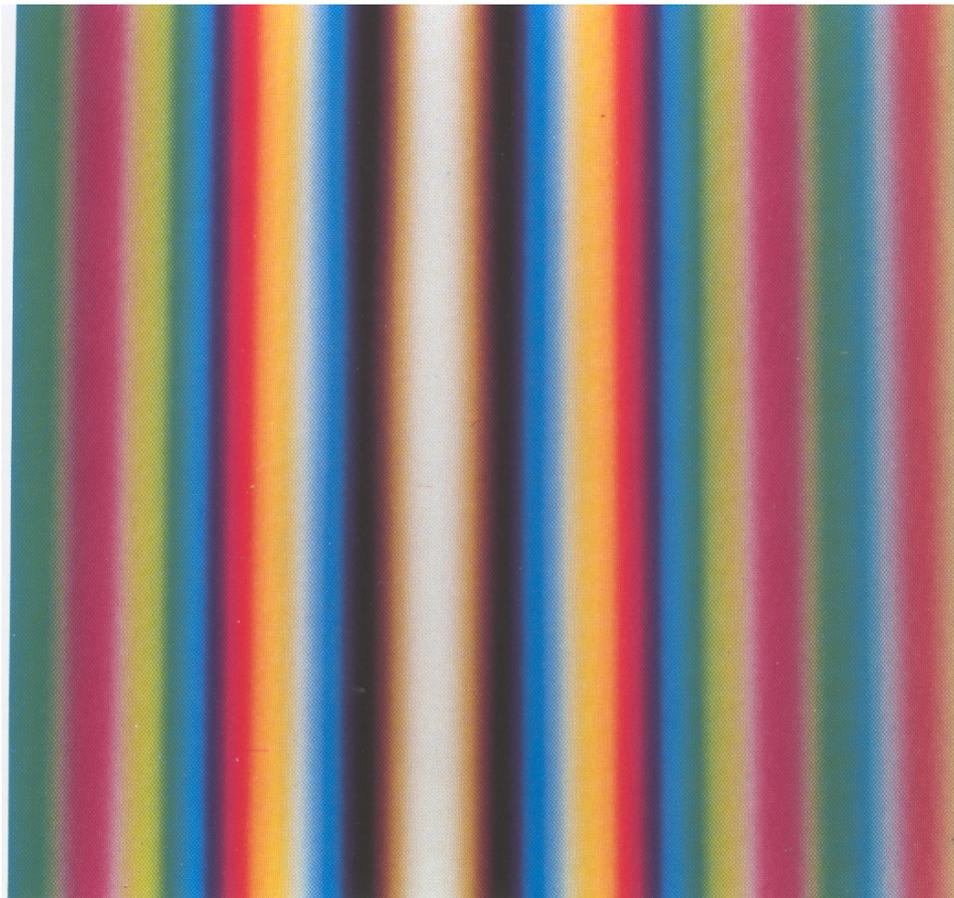


FIGURE 7.20 – Fentes d'Young en lumière verte (en haut) et en lumière rouge (en bas).



Youngsche Streifen bei weißer Lichtquelle · Franges d'Young en utilisant une source de lumière blanche
Young's fringes obtained with a white light source

FIGURE 7.21 – Fentes d'Young en lumière blanche.

Chapitre 8

Diffraction



FIGURE 8.1 – Diffraction à la surface de l'eau.

8.1 Principe de Huygens-Fresnel.

Tous les points d'une surface Σ soumis à un rayonnement incident ré-émettent ce rayonnement de manière cohérente dans toutes les directions.

Appliquons cela à des situations simples. Considérons d'abord comme surface Σ un plan d'onde. Le principe de Huygens Fresnel revient à considérer que chaque point P (ou plus exactement chaque élément de surface infinitésimal $d\sigma(P)$) de la surface d'onde se comporte comme une source ponctuelle et elle ré-émet une onde. Or comme toutes ces sources fictives sont cohérentes, elles interfèrent entre elles pour donner le plan d'onde suivant.

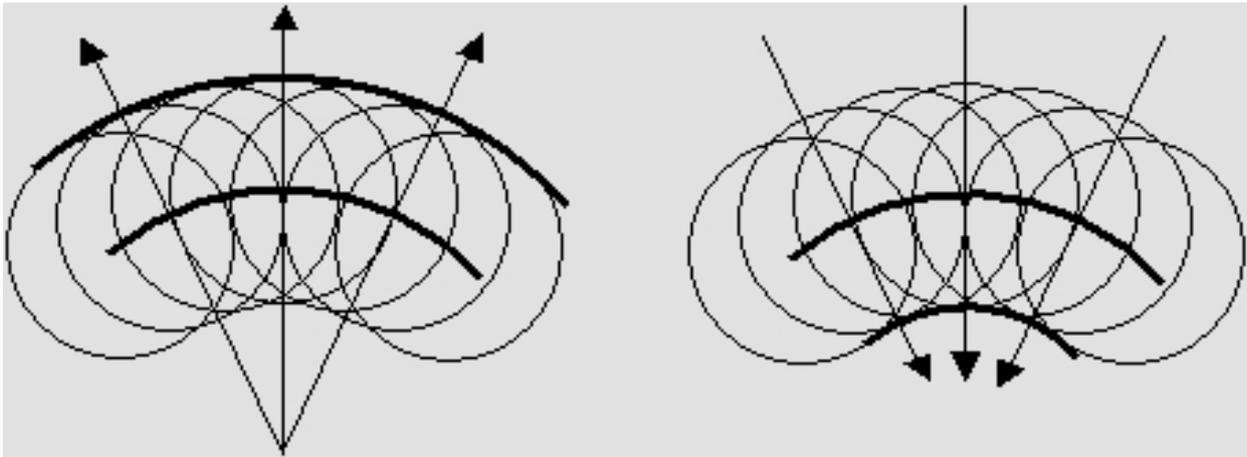


FIGURE 8.2 – Principe de la construction des surface d'ondes sphériques par le principe de Huygens.

Intéressons nous maintenant au cas qui nous intéresse, la diffraction par une fente. la surface Σ alors prise en compte est l'ouverture plane éclairée.

1. Chaque élément de surface infinitésimal $d\sigma(P)$ de cette ouverture se comporte comme une source ponctuelle fictive. L'ondellette émise, notée $d\underline{a}(P, t)$, est proportionnelle à l'onde reçue et à la surface $d\sigma(P)$.
2. Toutes les ondes fictives sont cohérentes entre elles, donc susceptibles d'interférer (d'où l'utilisation des complexes.)

Mathématiquement, cela devient :

$$\underline{a}_{tot}(M, t) = \iint_{P \in \Sigma} d\underline{a}(P, t)$$

$$\underline{a}_{tot}(M, t) = \iint_{P \in \Sigma} K a_0 \exp(-jk_0(SPM)) d\sigma(P)$$

Le facteur K est un facteur multiplicatif dimensionné $K \propto m^{-2}$.

Conditions de Fraunhofer.

Nous allons nous limiter à des calculs pour des systèmes expérimentaux en diffraction lointaines. Les conditions de Fraunhofer consiste à supposer que la source ainsi que le point d'observation sont à l'infini.

Il existe trois manières expérimentales de se placer dans les conditions de Fraunhofer :

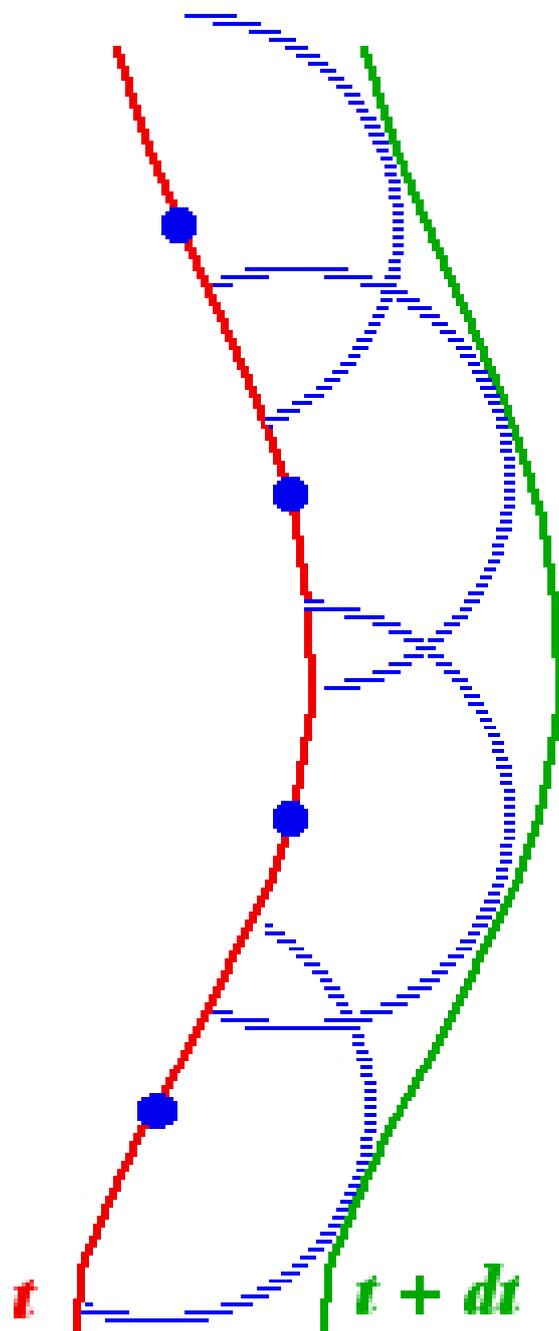


FIGURE 8.3 – Principe de la construction des surface d'ondes quelconque par le principe de Huygens.

1. En utilisant un laser (faisceau de lumière parallèle), ce qui est la manipulation couramment effectuée au lycée.
2. En plaçant l'écran et la source loin, à une distance D , du dispositif expérimentale de taille caractéristique a . ($D \gg a$), ce qui est fait dans la manipulation des trous d'Young.
3. En plaçant la source dans le plan focal objet d'une lentille et en effectuant les observations dans le plan focal image d'une seconde lentille.

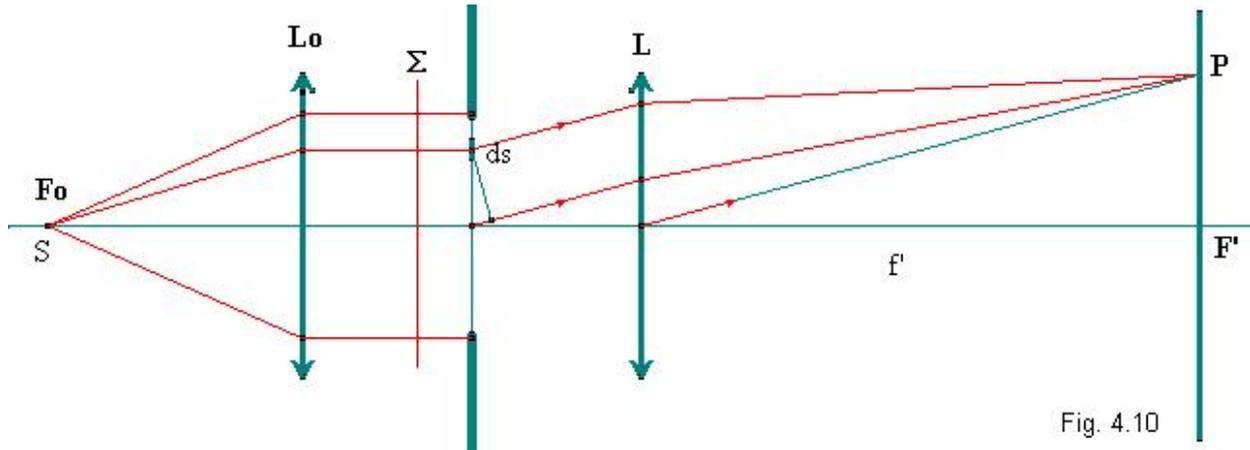


Fig. 4.10

FIGURE 8.4 – Montage pour étudier la diffraction dans les conditions de Fraunhofer.

Calculons explicitement cette intégrale pour une ouverture rectangulaire centrée sur un point O , comprise entre $x = -a/2$ et $x = a/2$ et entre $y = -b/2$ et $x = b/2$.

$$\underline{a}_{tot}(M, t) = \int_{x_p=-a/2}^{a/2} \int_{y_p=-b/2}^{b/2} K a_0 \exp(-jk_0(SPM)) dx_P dy_P$$

$$\underline{a}_{tot}(M, t) = \exp(-jk_0(SOM)) \cdot \int_{x_p=-a/2}^{a/2} \int_{y_p=-b/2}^{b/2} K a_0 \exp(-jk_0[(SPM) - (SOM)]) dx_P dy_P$$

Or $(SPM) - (SOM) = (\vec{u}' - \vec{u}) \cdot \vec{OP} = (\alpha' - \alpha)X_P - (\beta' - \beta) \cdot y_P$ avec $\alpha = -x_S/f'_1$, $\alpha' = -x_M/f'_2$, $\beta = -y_S/f'_1$, $\beta' = -y_M/f'_2$.

$$\underline{a}_{tot}(M, t) = \exp(-jk_0(SPM)) \cdot \int_{x_p=-a/2}^{a/2} \int_{y_p=-b/2}^{b/2} K a_0 \exp(-jk_0((\alpha' - \alpha)X_P - (\beta' - \beta) \cdot y_P)) dx_P dy_P$$

$$\underline{a}_{tot}(M, t) = \exp(-jk_0(SOM)) \cdot K a_0 \frac{\exp(jk_0((\alpha' - \alpha)a/2) - \exp(-jk_0((\alpha' - \alpha)a/2))}{j \cdot k_0} \cdot \frac{\exp(jk_0((\beta' - \beta)b/2) - \exp(-jk_0((\beta' - \beta)b/2))}{j \cdot k_0}$$

$$\underline{a}_{tot}(M, t) = K a b \cdot a_0 \exp(-jk_0(SOM)) \cdot \text{sinc}(k_0(\alpha' - \alpha)a/2) \cdot \text{sinc}(k_0(\beta' - \beta)b/2)$$

L'éclairement résultant pour une seule fente est donc :

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_0 \text{sinc}^2(k_0(\alpha' - \alpha)a/2) \cdot \text{sinc}^2(k_0(\beta' - \beta)b/2)$$

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_0 \text{sinc}^2(\pi(\alpha' - \alpha)/\lambda_0) \cdot \text{sinc}^2(\pi(\beta' - \beta)/\lambda_0)$$

La fonction sinuscardinal²=(sin(x)/x)² de l'éclairement est représenté ci après :

1. Le maximum est en $u=0$ et vaut 1.

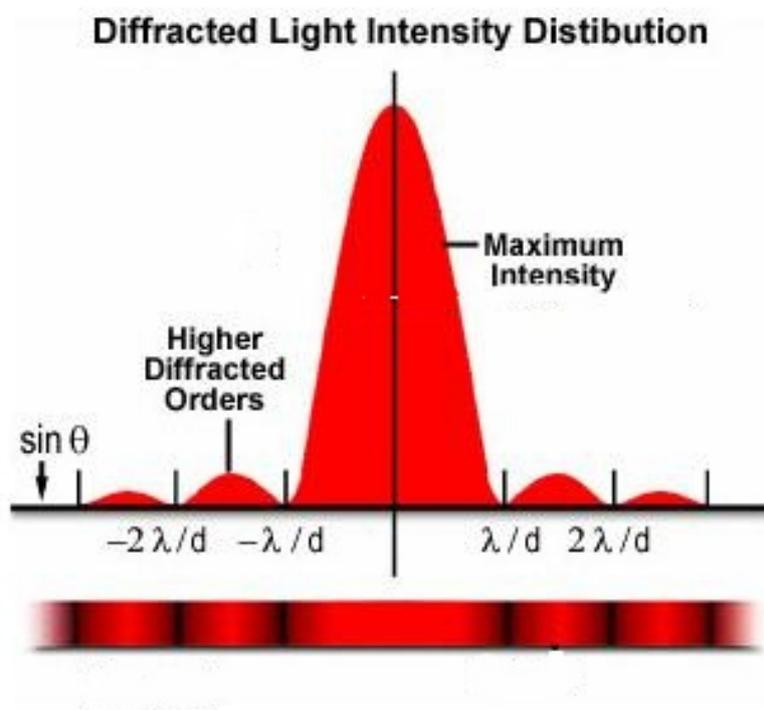


FIGURE 8.5 – Fonction de l'éclairement d'une fente : sinc^2 .

2. La tâche centrale est deux fois plus large que les tâches secondaires.
3. Le premier maximum secondaire est de 4% et le troisième de 1,6%

On constate donc que contrairement à l'interprétation de l'optique géométrique, plus la fente est fine, plus la diffraction est importante, plus la tâche centrale est large.

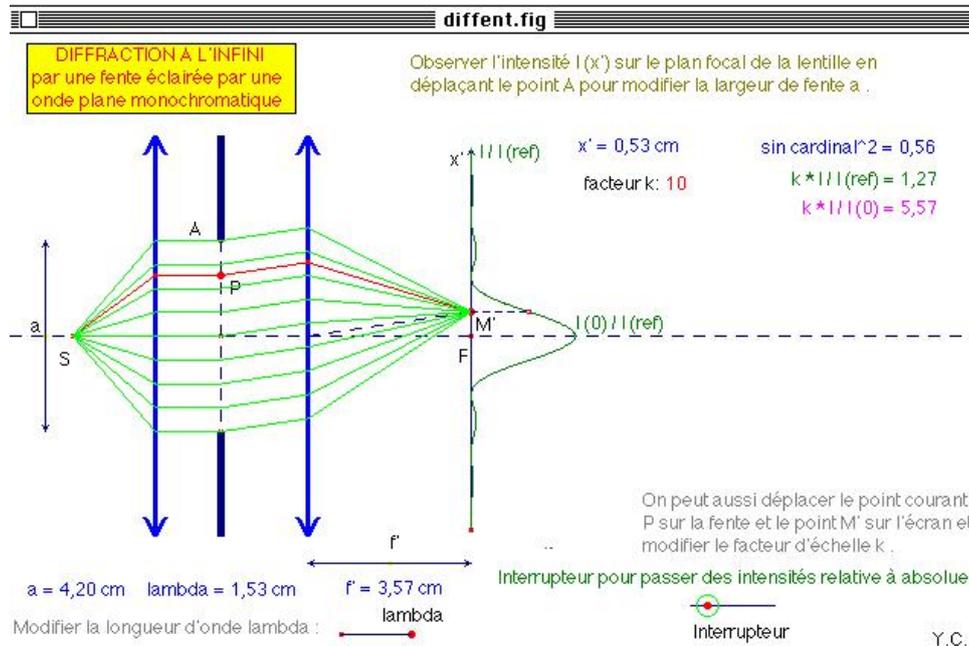


FIGURE 8.6 – Diffraction dans les conditions de Fraunhofer.

Remarque : la diffraction existe même pour grandes ouvertures. Elle est alors difficilement observable mais elle limite tout de même le pouvoir de résolution des télescopes ce qui a conduit à construire des télescope de grandes dimensions. (Sur terre, les turbuulences de l'atmosphère sont aussi très rapidement limitante mais l'optique adaptative permet de corriger et donc finalement de s'affranchir de ces effets.)

8.2 Interférence et diffraction, retour sur l'expérience d'Young.

Revenons sur l'expériences des fentes d'Young. Il est maintenant clair que les deux fentes se comportent comme des sources secondaires cohérentes.

Reprenons le calcul pour l'onde \underline{a}_1 passant par la première fente, de centre O_1 et de largeur e :

$$\underline{a}_1(M, t) = K'a.a_0 \exp(-jk_0(SO_1M)).\text{sinc}(\pi(\alpha' - \alpha)e/\lambda_0)$$

De même $\underline{a}_2(M, t) = K'a.a_0 \exp(-jk_0(SO_2M)).\text{sinc}(\pi(\alpha' - \alpha)e/\lambda_0)$

Les ondes étant cohérentes :

$$\underline{a}_{tot}(M, t) = \underline{a}_1(M, t) + \underline{a}_2(M, t)$$

$$\underline{a}_{tot}(M, t) = K'a.a_0 \exp(-jk_0(SO_1M)).\text{sinc}(\pi(\alpha' - \alpha)e/\lambda_0) + K'a.a_0 \exp(-jk_0(SO_2M)).\text{sinc}(\pi(\alpha' - \alpha)e/\lambda_0)$$

$$\underline{a}_{tot}(M, t) = K'a.a_0(\exp(-jk_0(SO_1M)) + \exp(-jk_0(SO_2M))).\text{sinc}(\pi(\alpha' - \alpha)e/\lambda_0)$$

Le terme entre parenthèse donnant naissance aux phénomènes d'interférence déjà vu dans le chapitre précédent.

Soit au final :

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_0 \text{sinc}^2(\pi(\alpha' - \alpha)e/\lambda_0)(1 + \cos(2\pi(\alpha' - \alpha)a/\lambda_0))$$

Le terme d'interférence est donc modulé par le terme de diffraction comme le montre la figure suivante.

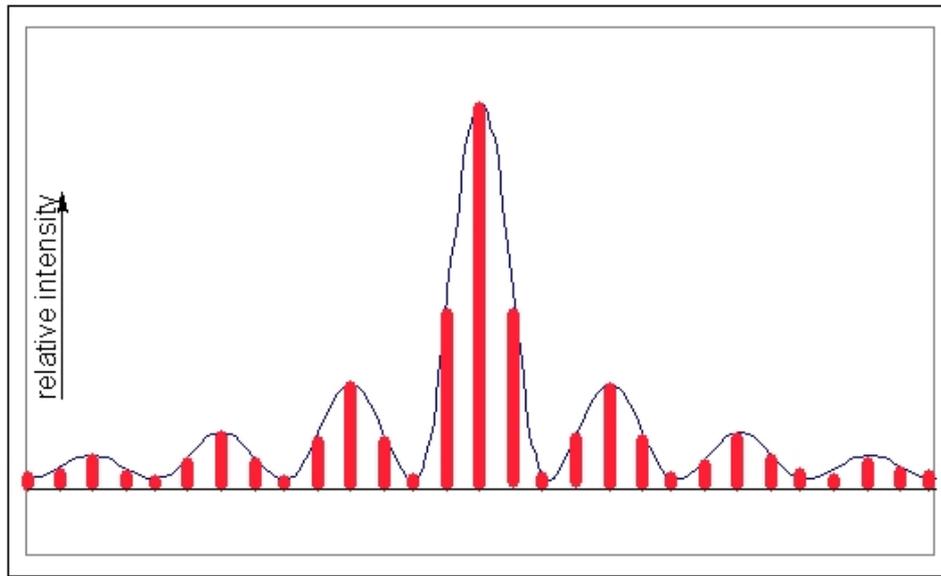


FIGURE 8.7 – Interférence et diffraction : chaque fente donne naissance à un phénomène de diffraction et la lumière provenant des deux sources interfère.

Cette observation peut être généralisée et démontrée mathématiquement à partir des propriétés de la transformée de Fourier.

$$\underline{a}_{tot}(M, t) = \int \int_P t(P) K a_0 \exp(-jk_0(SPM)) d\sigma(P) \text{ où } t(p) \text{ désigne la transparence du milieu.}$$

Cette intégrale correspond à une transformée de Fourier.

De plus $t(P)$ peut s'écrire comme un produit de convolution.

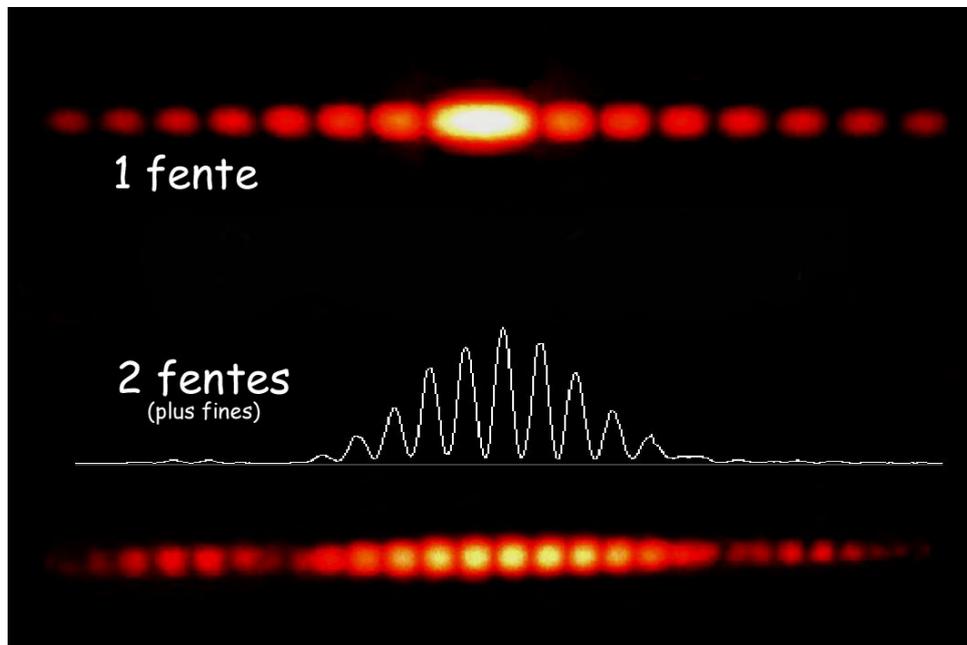


FIGURE 8.8 – Interférence et diffraction : la diffraction module le phénomène d'interférence.

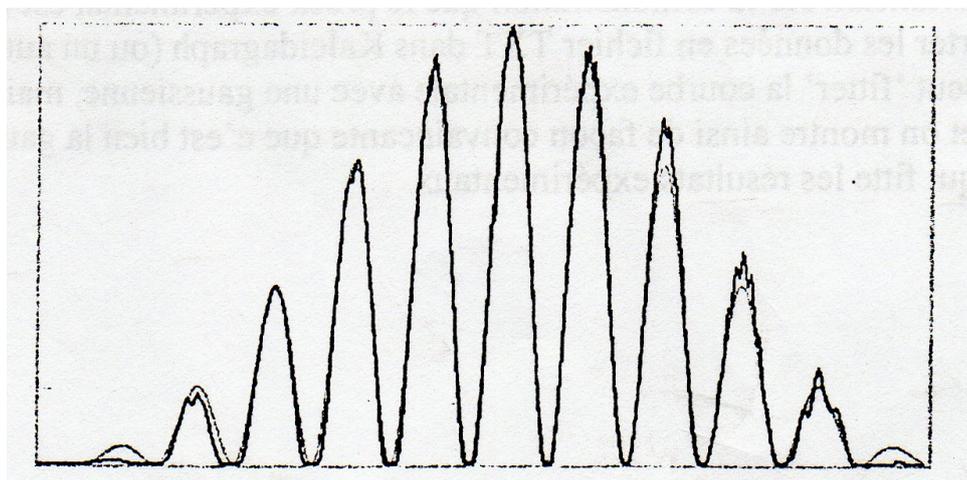


FIGURE 8.9 – Interférence et diffraction : enregistrement de l'éclairement et modélisation au laboratoire.

Or comme au final, la transformée de Fourier transforme le produit de convolution en produit simple :

$\epsilon_{tot} = \epsilon_{motif} \cdot I$ où ϵ_{motif} est le terme d'éclairement correspondant à la diffraction par un motif et I le terme d'interférence à N ondes, interférences entre les ondes issues des divers motifs.

Remarque l'expérience d'Abbe illustre magnifiquement la double transformée de Fourier et le filtrage des fréquences spatiales. Pour la mettre en oeuvre, reportez vous au Sextant.

8.3 Les réseaux.

Les réseaux sont un ensemble de N fentes de largeur e et équidistantes de a . Le pas est souvent donné en nombre de traits par millimètre $n = \frac{1}{a}$. Un bon réseau est typiquement de 1000 traits par mm soit $a = 1\mu m$. Pour un faisceau incident de 1cm, il y a donc N=10000 traits éclairés (interférences à 10000 ondes).

Les réseaux sont utilisés dans les conditions de Fraunhofer.

La condition d'interférence des ondes est donc :

$$\delta = (SO_n M) - (SO_{(n+1)} M) = a \sin i' - a \sin i$$

$$\delta = p\lambda_0$$

donc

$$\sin i' - \sin i = \frac{p\lambda_0}{a}$$

1. L'ordre 0 correspond à l'image géométrique de la source. La lumière n'est pas dispersée (si elle est polychromatique).
2. L'ordre 1 est lui intéressant car les différentes longueurs d'onde se trouvent séparées (la dispersion est aussi à l'inverse de celle d'un prisme).
3. L'ordre d'interférence est limitée (car $|\sin| < 1$) $p < \frac{2a}{\lambda_0}$ soit $p \leq 4$ pour le visible mais le recouvrement des ordres apparaît en général avant (ce qui rend l'interprétation du spectre difficile).

Remarque : il existe un réseau Blaze qui permet d'avoir le maximum de lumière non dans l'ordre 0 ce qui n'est guère intéressant mais dans l'ordre 1, où il y a effectivement dispersion de la lumière. L'idée de ces réseaux, utilisés dans les spectromètres, est de faire que l'image géométrique de la source correspondent à l'ordre 1.

Remarque : la diffraction est aussi utilisée pour résoudre les structures cristallographiques. Aujourd'hui, quand les chercheurs parviennent à fabriquer des cristaux de molécules organiques (ce qui est très difficile) la structure est résolue dans les synchrotrons (comme Soleil) alors utilisés comme source de rayon X (la Brehmstrahlung, émission électromagnétique de particule accélérée). L'information essentielle est celle du motif dont on cherche à comprendre le repliement.

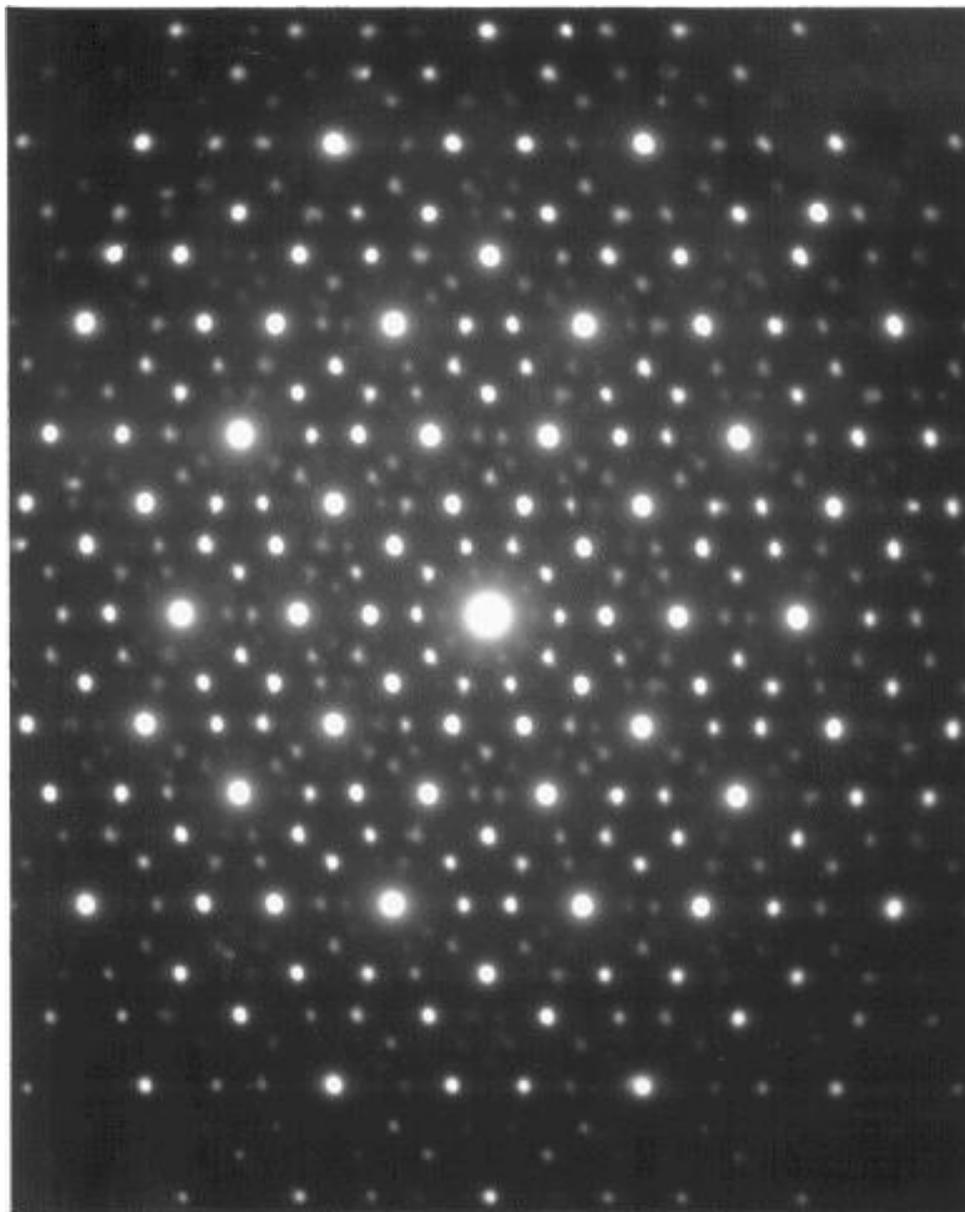


FIGURE 8.10 – Etude cristallographique.

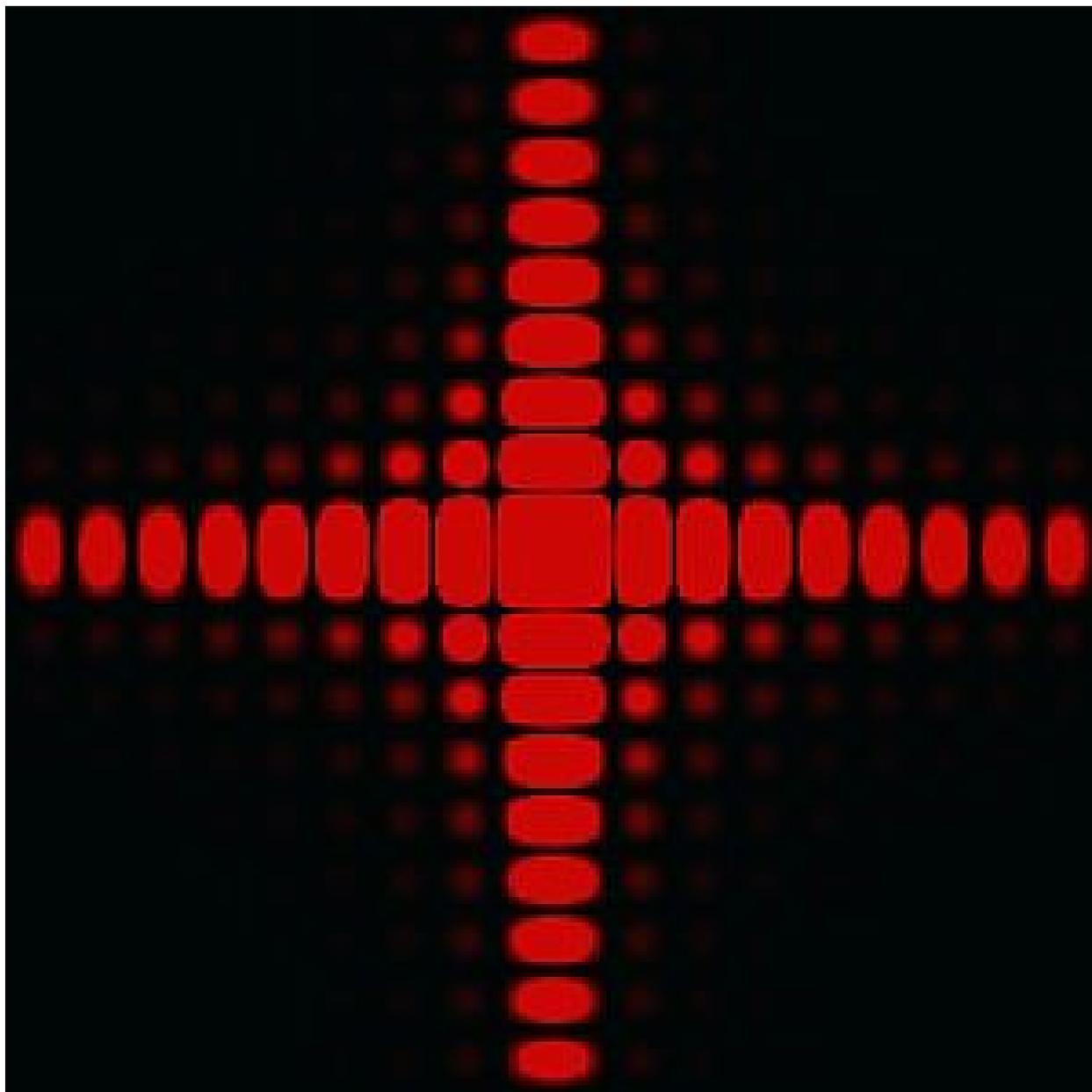


FIGURE 8.11 – Diffraction par une fente.

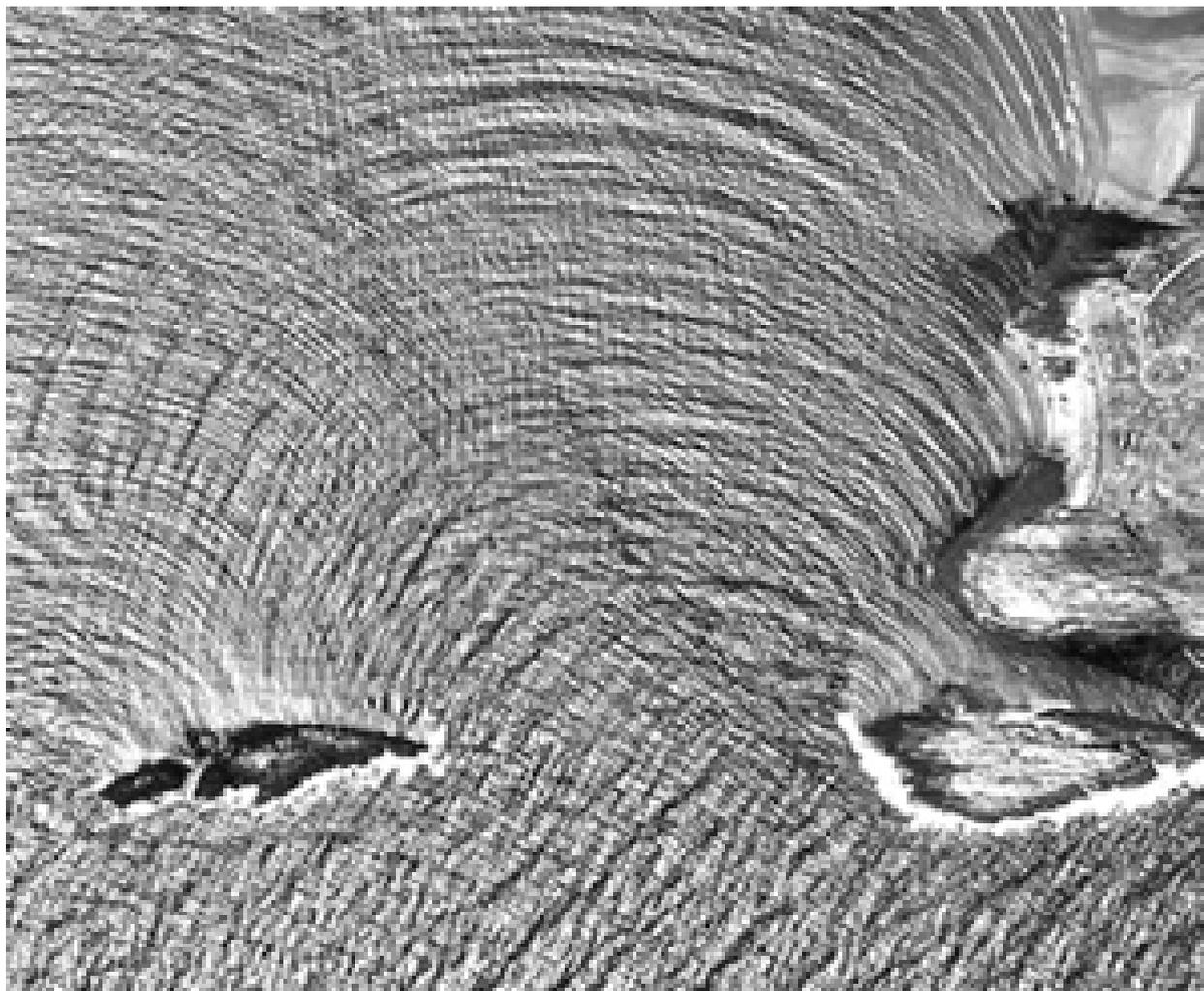


FIGURE 8.12 – Diffraction à la surface de l'eau, vue du ciel.

Chapitre 9

Manipulations possibles avec le logiciel Caliens.

CALIENS est un logiciel d'acquisition et de traitement des données issues d'une caméra CCD interfacée avec la PC. Il permet d'étudier les phénomènes d'optique ondulatoire de manière agréable et très rapide.

Toutes les manipulations habituelles faites avec une caméra CCD sont donc possibles avec CALIENS. La force de ce logiciel réside dans le traitement des données.

Les parties ci après proposent une liste de manipulations possibles mais n'a nul prétention d'exhaustivité.

9.1 Etude de la figure de diffraction.

Il est possible d'étudier la figure de diffraction par une fente simple. Pour cela, il faut avoir plusieurs maxima secondaires. Il faut pour ce faire masquer la tâche principale trop lumineuse qui sature le CCD. Mais une fois cette manipulation faite, il est possible d'observer 2x4 minima secondaires (4 de part et d'autre de la tâche centrale masquée).

Il est alors possible de demander à CALIENS de simuler la fonction de diffraction et d'adapter les paramètres pour remonter à la taille de la fente.

9.2 Les fentes d'Young.

Il est possible de montrer que l'éclairement observé sur l'écran, résultant du dispositif des fentes d'Young est la conjugaison (ou superposition) de deux phénomènes : le phénomène d'interférence et le phénomène de diffraction.

1. Acquérir la figure de l'éclairement.

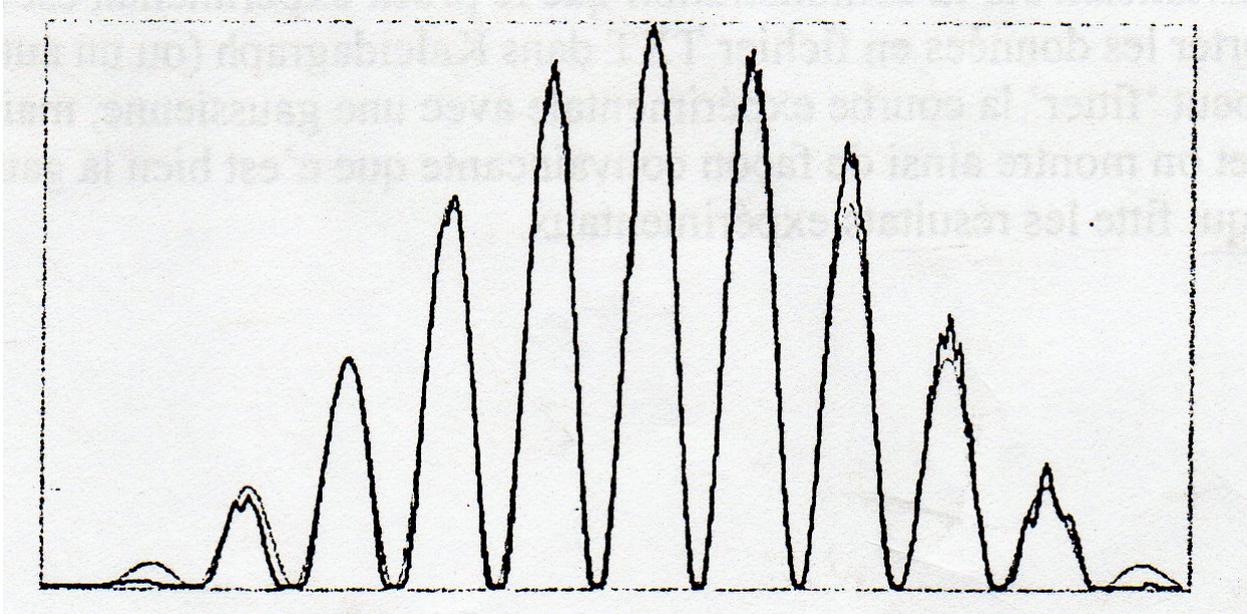


FIGURE 9.1 – Minima secondaires de la figure de diffraction

2. Masquer une des deux fentes et acquérir le signal. La figure observé résulte uniquement du phénomène de diffraction par une fente.
3. Superposer les deux courbes.

9.3 Cohérence spatiale d'une source étendue.

Toujours avec le dispositif des fentes d'Young, il est possible de mettre en évidence l'incohérence spatiale d'une source.

1. Eclairez le dispositif des fentes d'Young avec une fente source de largeur l . Observez la figure d'interférence. Augmentez la largeur l de la fente source jusqu'à observez un brouillage. (Une source fictive ponctuelle à une extrémité de la fente donne une frange brillante et la source fictive ponctuelle au centre de la fente donne une frange sombre, d'où un éclaircissement uniforme, toutes les sources fictives se compensent deux à deux.)
2. Continuez à augmenter l , la figure d'interférence réapparaît (puisque toutes les sources fictives ne sont plus compensées).
3. Il est ainsi possible de voir trois brouillages et trois réapparitions compte tenu du contraste.

Remarque : Si vous avez étalonné la fente comme expliqué au 1, la manipulation peut devenir quantitative.

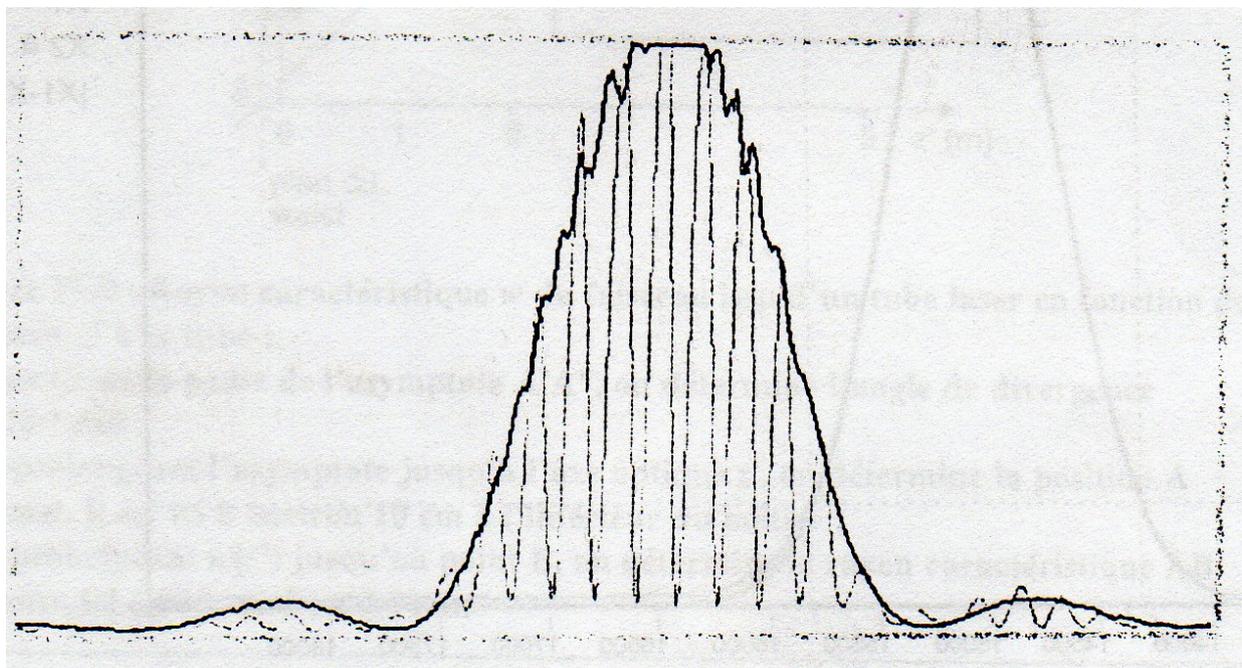


FIGURE 9.2 – Interférence et diffraction sur les fentes d'Young

9.4 Spectroscopie à transformée de Fourier : Etude d'un doublet de lampe spectrale.

C'est la très grande force de CALIENS : illustrer l'importance des phénomènes d'interférences en relation avec l'analyse de Fourier.

La caméra CCD est capable de réaliser une acquisition dans le temps. Cette dernière consiste à échantillonner le pixel central de la caméra à intervalle de temps régulier.

1. Régler le Michelson en lame d'air et placer la fibre optique au centre de la figure d'interférence. (Remarque : il faut être soigneux sur cette étape).
2. Faire tourner le moteur du Michelson afin qu'il translate le miroir.
3. CALIENS enregistre (mieux que la table traçante) les battements optiques.
4. CALIENS propose alors de faire la transformée du signal.

Remarque importante :

Il est possible que cette expérience échoue, non pas à cause de CALIENS mais à cause du Michelson. Les moteurs continus des Michelsons sont de qualité très variables et ils peuvent avoir un fonctionnement très irrégulier .

Pour vérifier la qualité du moteur, mon conseil est d'enregistrer pendant un intervalle de temps faible les oscillations observées sur le pixel central et de vérifier si oui ou non il s'agit d'une oscillation parfaitement sinusoïdale. (Simulation de CALIENS). Si oui, tout va bien. Si non, le

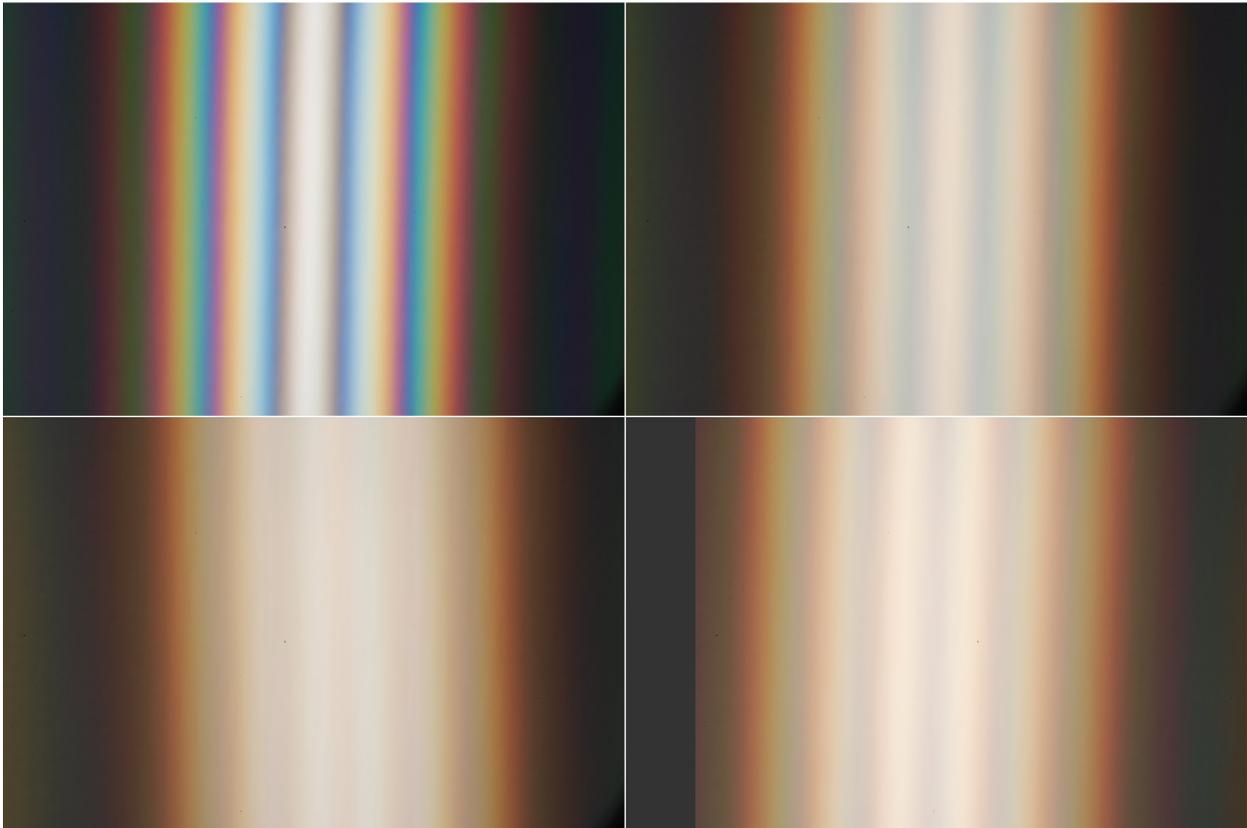


FIGURE 9.3 – Cohérence spatiale avec les fentes d’Young. En ouvrant progressivement la fente source, il est possible de voir disparaître puis réapparaître les interférences, pour illustrer la cohérence spatiale.

pic de Fourier correspondant à la fréquence principale est très large et ne permet pas de résoudre le doublet.

Dans ce dernier cas, il est possible d’essayer de remédier à cela en démarrant avant le début de l’acquisition le moteur (ainsi le démarrage parfois difficile du moteur est éliminé). Si cela ne suffit pas, il faut revenir à la bonne vieille méthode et les curseurs de CALIENS pour compter le nombre de battements entre les curseurs. Pour la fréquence principale, la TF fonctionne très bien ou il est aussi possible de la mesurer en comptant les oscillations entre deux curseurs à l’aide de la fonction de CALIENS *Détection des Maxima*.

Enfin, il est possible de résoudre le problème du moteur en utilisant un laser étalon (He-Ne par exemple) défilant au centre du CCD. Ce n’est pas envisageable en TP mais l’idée peut être évoquée.

9.5 Etude d’un laser : faisceau gaussien.

CALIENS permet de vérifier que le faisceau laser est gaussien. Clairement, cette manipulation n’est pas au programme de Prépa mais pour un TIPE (j’ai encadré

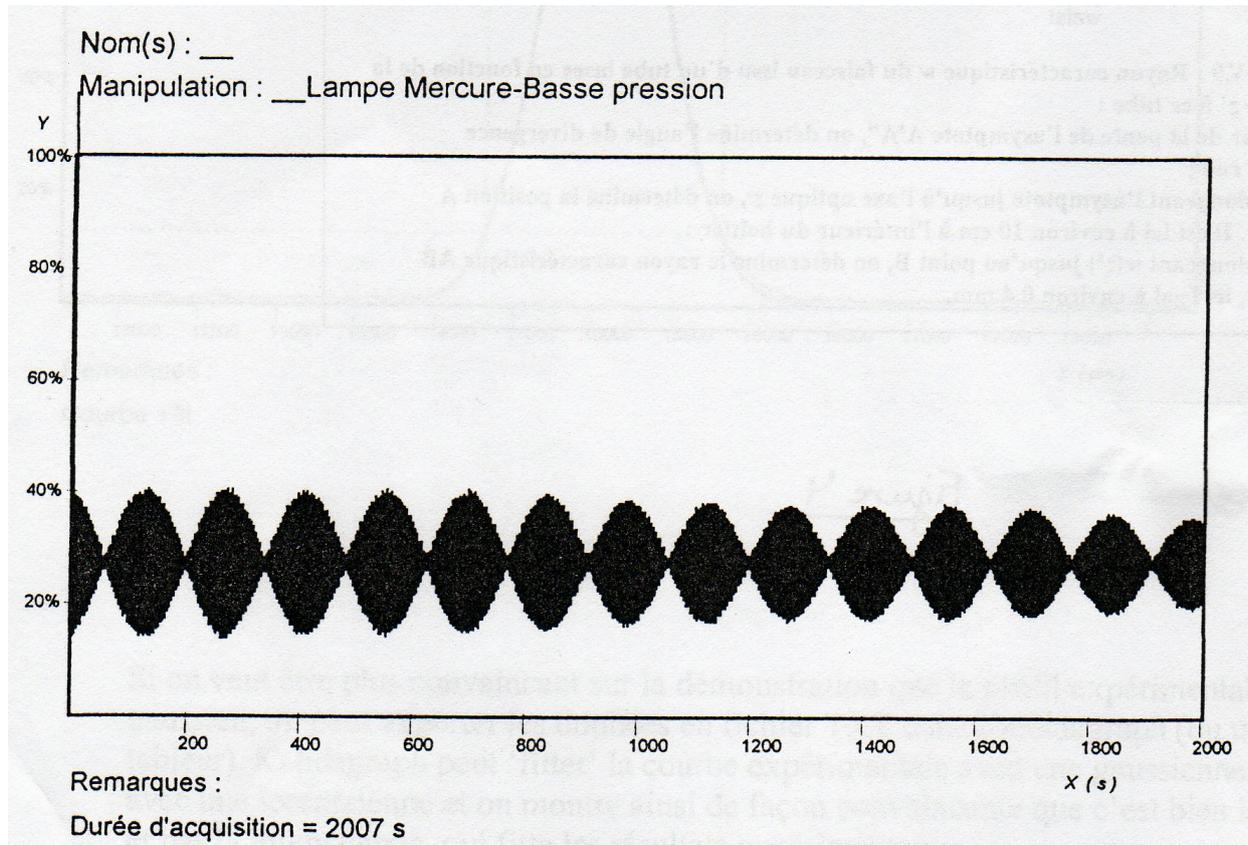


FIGURE 9.4 – Doublet du Mercure

un TIPE sur la distance Terre-Lune par exemple).

9.5.1 Première expérience.

Il ne faut pas envoyer directement le laser sur le CCD au risque de le détériorer. Il faut utiliser des filtres de forte densité (5 au minimum) ou en l'absence de filtre, trois polariseurs croisés (deux si le laser est polarisé...)

CALIENS propose alors un ajustement expérimental avec une gaussienne.

Il est cependant plus convaincant d'exporter les données sous un tableur tel OpenOffice au format .txt.

(En fait, avec le fit de CALIENS, une lorentzienne marche aussi bien que la gaussienne, ce qui décevant, d'où l'intérêt d'exporter les résultats.)

9.5.2 Deuxième manipulation.

Il est possible de tracer la courbe de la largeur caractéristique w du faisceau issu d'un faisceau laser en fonction de la distance z au laser, pour en déduire l'angle de divergence et le rayon caractéristique du waist.

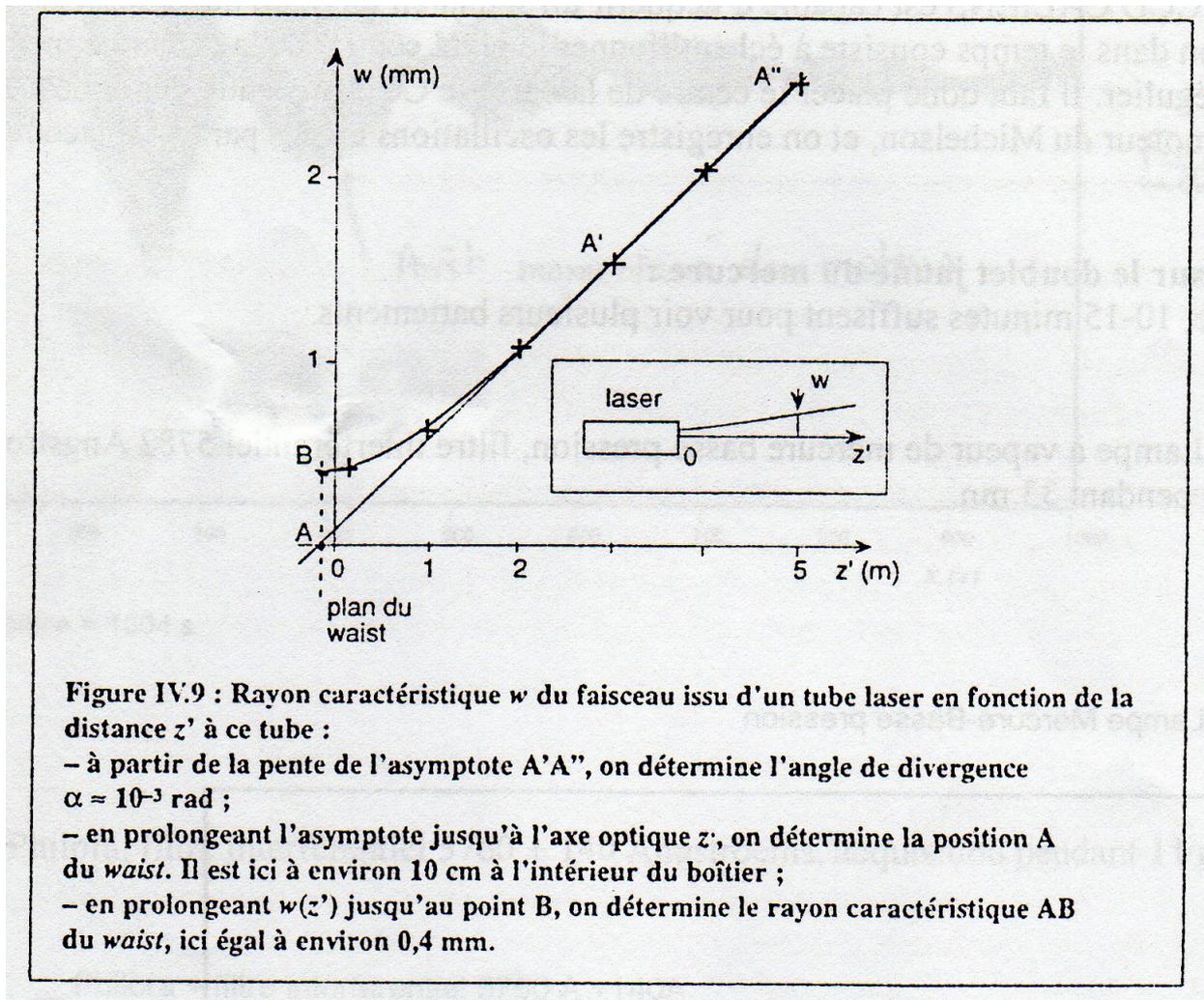


FIGURE 9.5 – Faicseau Gaussien. Extrait du Sextant.