

Physique des ondes.

P. Ribière

Collège Stanislas

Année Scolaire 2016/2017

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 Onde dans une ligne bifilaire.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 Conclusion.

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
 - Description et modélisation de la situation.
 - Equation de propagation de l'onde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 Onde dans une ligne bifilaire.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 Conclusion.



FIGURE – Dispositif expérimental de la corde de Melde.

La corde est supposée inextensible, de longueur L , de masse linéique μ .

Elle est tendue à l'aide d'une masse M accrochée à la corde via une poulie (parfaite) et excitée par un vibreur à son autre extrémité.

$y(x, t)$ est le déplacement transversale d'un morceau de la corde de Melde situé en x à l'instant t .



FIGURE – Dispositif expérimental de la corde de Melde.

Pour cette étude, trois hypothèses sont nécessaires :

- 1 Le déplacement de la corde suivant l'axe des x est négligé, tant et si bien que un point de la corde situé en $(x, 0)$ à l'équilibre se retrouve en $(x, y(x, t))$ lors de la vibration de la corde.
- 2 Le déplacement de la corde est supposée de "faible" amplitude de manière à ce que l'angle $\alpha(x, t)$ de la corde avec l'horizontal reste faible et donc on se limite à ordre 1 dans les DL en cet infiniment petit.
- 3 Le poids est négligé devant les forces de tension. Le fil est supposé parfaitement horizontal à l'équilibre.

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
 - Description et modélisation de la situation.
 - Equation de propagation de l'onde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 Onde dans une ligne bifilaire.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 Conclusion.

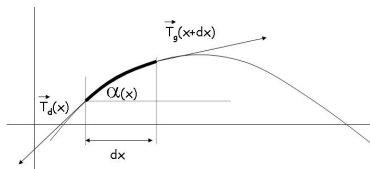


FIGURE – Élément de longueur dx de la corde étudiée .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un élément infinitésimal dx de la corde dans le référentiel terrestre supposé galiléen donne :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{T}_g(x, t) + \vec{T}_d(x + dx, t)$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un élément infinitésimal dx de la corde dans le référentiel terrestre supposé galiléen donne :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{T}_g(x, t) + \vec{T}_d(x + dx, t)$$

En projetant sur les axes, on trouve :

$$\text{sur } \vec{u}_x \quad 0 = -T(x) \cos(\alpha(x)) + T(x + dx) \cos(\alpha(x + dx))$$

$$\text{sur } \vec{u}_y \quad \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T(x) \sin(\alpha(x)) + T(x + dx) \sin(\alpha(x + dx))$$

En se limitant à des infiniment petits d'ordre 1 :

$$0 \simeq -T(x) + T(x + dx) \text{ d'où } T(x) = \text{cste} = T_0 = Mg$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \simeq -T_0 \alpha(x) + T_0 \alpha(x + dx) \simeq_{DL_1} T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

La longueur dx choisie arbitrairement se simplifie.

Puis, en utilisant, $\alpha \simeq \tan(\alpha) \simeq \frac{\partial y}{\partial x}$, il vient finalement

Equation de propagation unidimensionnelle de d'Alembert.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

La célérité de l'onde dans la corde est donc :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

La vitesse varie avec la raideur du milieu (ici la tension du fil T_0)

La varie avec l'inverse de l'inertie du milieu (ici la masse linéique μ).

Ceci se généralise pour toutes les ondes mécaniques.

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
 - Solutions sous forme d'onde plane progressive harmonique.
 - Solutions sous forme d'onde plane stationnaire.
 - Lien entre les diverses solutions.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 Onde dans une ligne bifilaire.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 Conclusion.

Cherchons les solutions possibles $a(x, t)$ à l'équation de propagation unidimensionnelle de d'Alembert.

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0$$

Pour cette résolution, il est judicieux d'introduire de nouvelles variables : $(x, t) \rightarrow (u, v)$ avec $u = t - \frac{x}{c}$ et $v = t + \frac{x}{c}$.

Par ce changement de variable, l'équation de d'Alembert devient :

$$4. \frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v} = 0$$

La forme des solutions est alors

$$a(x, t) = f(u) + g(v) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Montrer que

Interprétation de ces solutions :

Onde Plane Progressive.

$a(x, t) = f(t - \frac{x}{c})$ correspond à une propagation dans le sens des x positifs, sans atténuation ni déformation.

Cette solution est appelé Onde Plane Progressive selon $+\vec{u}_x$, notée OPP_+ .

Démonstration :

$$a(x, t) = f(t - \frac{x}{c}) = f((t - \frac{x}{c})) - \frac{0}{c} = a(x' = 0, t' = t - \frac{x}{c})$$

L'onde qui se trouve en x à l'instant t est l'onde qui se trouvait en $x' = 0$ à l'instant $t' = t - \frac{x}{c}$. L'onde s'est donc propagée dans le sens des x positifs, sans atténuation ni déformation.

$a(x, t) = f(t - \frac{x}{c})$ correspond à une propagation dans le sens des x décroissant, sans atténuation ni déformation.

Cette solution est appelé Onde Plane Progressive selon $-\vec{u}_x$, notée OPP_- .

Onde Plane Progressive Harmonique.

Comme l'équation est linéaire, il est possible de recourir à l'idée de Fourier et de n'étudier qu'une composante "générique" de Fourier et donc de se ramener à :

$$a(x, t) = a_0 \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = a_0 \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Cette solution est appelé Onde Plane Progressive Harmonique selon \vec{u}_x , notée OPPH₊

Le vecteur d'onde $\vec{k} = k \cdot \vec{u}_x$ est donc de module :

Relation de dispersion.

$$k = \frac{\omega}{c}$$

ce qui donne

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}$$

Etude de la phase de l'onde plane progressive harmonique.

$$\varphi(t) = \omega.t - k.x$$

Surface d'onde.

Le lieu des points où la phase de l'onde est constante à un instant t fixée, est appelée surface d'onde.

Le vecteur d'onde est perpendiculaire à la surface d'onde en tout point.

Pour l'Onde Plane Progressive Harmonique, la surface d'onde est un plan $x = cste$.

Vitesse de phase v_φ .

La vitesse de phase est la vitesse de propagation de la phase de l'onde.

$$\varphi(t) = \omega.t - k.x = \omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Pour l'Onde Plane Progressive Harmonique, la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$.

Cette vitesse de phase est la même pour toutes les composantes de Fourier du signal, donc le signal se propage sans déformation : le milieu est non dispersif.

Onde Plane Progressive Harmonique et notation complexe.

L'équation est linéaire et compte tenu de la forme du signal, il est possible et judicieux de recourir à la notation complexe.

$$a(x, t) = a_0 \exp(j\omega.t - k.x + \varphi) \Leftrightarrow \underline{a}(x, t) = \underline{a}_0 \exp(j\omega.t - k.x) \text{ avec } \underline{a}_0 = a_0 \exp(j\varphi)$$

Pour revenir de la forme complexe à la forme réelle, il suffit de prendre la valeur réelle :

$$a(x, t) = \Re(\underline{a}(x, t))$$

$$\frac{\partial \underline{a}}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega \underline{a}(x, t)$$

$$\frac{\partial \underline{a}}{\partial x} \Leftrightarrow -jk \underline{a}(x, t)$$

$$\frac{\partial \underline{a}}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega \underline{a}(x, t)$$

$$\frac{\partial \underline{a}}{\partial x} \Leftrightarrow -jk \underline{a}(x, t)$$

Utilisons donc cette forme complexe pour retrouver la relation de dispersion.
Pour cela, injectons la forme complexe dans l'équation de d'Alembert :

Relation de dispersion de d'Alembert.

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Cette méthode d'obtention de la relation de dispersion est celle qui se généralisera pour toutes les équations d'onde (même les équations de propagation qui ne sont pas de d'Alembert. cf. chapitre dispersion absorption.)

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 **L'équation d'onde de d'Alembert.**
 - Solutions sous forme d'onde plane progressive harmonique.
 - **Solutions sous forme d'onde plane stationnaire.**
 - Lien entre les diverses solutions.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 Onde dans une ligne bifilaire.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 Conclusion.

Cherchons les solutions possibles $a(x, t)$ à l'équation de propagation unidimensionnelle de d'Alembert.

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0$$

sous la forme suivante, où les variables temporelles et spatiales sont séparées :

$$a(x, t) = F(x).G(t)$$

L'équation de d'Alembert se réécrit alors

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dt^2}$$

Le membre de gauche ne dépend que de x , celui de droite ne dépend que de t .

Or cette équation est vraie $\forall x$ et $\forall t$.

Ce qui impose que chaque membre est égale à une constante K .

$$\frac{d^2 F}{dx^2} - K.F(x) = 0$$

$$\frac{d^2 G}{dt^2} - \frac{K}{c^2}.G(t) = 0$$

Pour éviter les divergences non physiques (et puisque la solution cherchée est une onde), le constante K est négative. $K < 0$.

Et par homogénéité, on pose $K = -k^2$ et $\frac{K}{c^2} = -\frac{k^2}{c^2} = -\omega^2$.

D'où

$$a(x, t) = A \cos(\omega.t + \varphi). \cos(k.x + \psi)$$

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 **L'équation d'onde de d'Alembert.**
 - Solutions sous forme d'onde plane progressive harmonique.
 - Solutions sous forme d'onde plane stationnaire.
 - **Lien entre les diverses solutions.**
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 Onde dans une ligne bifilaire.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 Conclusion.

La somme de deux ondes progressives de même amplitude mais de sens de propagation différent donne une onde stationnaire.

$$a(x, t) = a_0 \cos(\omega t - kx) + a_0 \cos(\omega t + kx + \pi)$$

$$a(x, t) = -2 \cdot a_0 \cdot \sin(\omega t) \sin(kx)$$

(Le déphasage de π est caractéristique de la réflexion d'une onde sur un point d'arrêt.)

La somme de deux ondes stationnaires déphasées de $\frac{\pi}{2}$ donne une onde progressive.

$$a(x, t) = a_0 \cos(\omega t) \cos(kx) + a_0 \sin(\omega t) \sin(kx)$$

$$a(x, t) = a_0 \cdot \cos(\omega t - kx)$$

Chacune des solutions Onde Plane Stationnaire et Onde Plane Progressive Harmonique est

génératrice de l'ensemble des solutions.

Le choix de la forme des solutions est donc arbitraires.

Néanmoins le choix de la forme des solutions est guidé par l'exercice et plus particulièrement par les conditions aux limites imposées.

Dans le cas d'un milieu infini, il n'y a aucune condition au limite, donc la forme des ondes planes progressives harmoniques est la mieux adaptée.

Dans l'exercice de la corde vibrante de Melde, la corde possède un noeud à une extrémité, cette condition au limite stricte guide donc vers le choix d'une solution de type onde stationnaire. (Une onde progressive selon $+\vec{u}_x$ s'est réfléchi à l'extrémité de la corde et s'est transformée en une onde progressive suivant $-\vec{u}_x$, la superposition de ces deux ondes donnant l'onde stationnaire.)

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
 - Régime libre.
 - Régime forcée.
- 4 Onde dans une ligne bifilaire.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 Conclusion.

La corde est fixée à ces deux extrémités.

Les conditions aux limites sont donc :

$$y(x = 0, t) = 0 \text{ et } y(x = L, t) = 0 \forall t$$

Il est donc judicieux de chercher la solution sous forme d'onde stationnaire :

$$a(x, t) = A \cos(\omega.t + \varphi). \cos(k.x + \psi)$$

Retrouvons d'abord la relation de dispersion :

En injectant la forme proposée dans l'équation, il vient :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

La corde est fixée à ces deux extrémités.

Les conditions aux limites sont donc :

$$y(x = 0, t) = 0 \text{ et } y(x = L, t) = 0 \forall t$$

Il est donc judicieux de chercher la solution sous forme d'onde stationnaire :

$$y(x, t) = A \cos(\omega.t + \varphi). \cos(k.x + \psi)$$

Appliquons les Conditions aux Limites :

$$y(x, t) = A \cos(\omega.t + \varphi). \cos(\psi) = 0 \forall t \text{ donc } \psi = \frac{\pi}{2}$$

$$y(x, t) = A \cos(\omega.t + \varphi). \sin(kL) = 0 \forall t \text{ donc } k_n = \frac{n\pi}{L}$$

La quantification du mode est liée aux conditions aux limites.

$$y(x, t) = A_n \cos(\omega_n.t + \varphi_n). \sin(k_n.x)$$

La corde est fixée à ces deux extrémités.

Les conditions aux limites sont donc :

$$y(x = 0, t) = 0 \text{ et } y(x = L, t) = 0 \forall t$$

L'onde stationnaire vérifiant ces conditions aux limites est :

$$y(x, t) = A_n \cos(\omega_n \cdot t + \varphi_n) \cdot \sin(k_n \cdot x)$$

avec

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \text{ soit } \lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{c}{f_n}$$

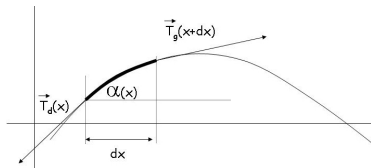


FIGURE – Les modes propres de la corde de Melde.

La distance entre deux noeuds est $\frac{\lambda}{2}$.

La distance entre deux ventres est $\frac{\lambda}{2}$.

Le $n^{\text{ième}}$ mode propre a, ici, $n + 1$ noeuds et n ventres.

A partir du graphique, il est possible de retrouver $\lambda_n = \frac{2L}{n}$

La corde est fixée à ces deux extrémités.

Les conditions aux limites sont donc :

$$y(x = 0, t) = 0 \text{ et } y(x = L, t) = 0 \forall t$$

L'onde stationnaire vérifiant ces conditions aux limites est :

$$y(x, t) = A_n \cos(\omega_n \cdot t + \varphi_n) \cdot \sin(k_n \cdot x)$$

avec

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \text{ soit } \lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{c}{f_n}$$

Solution générale de la corde de Melde.

La solution générale de l'équation de d'Alembert avec les conditions aux limites est la superposition des différents modes propres.

$$y(x, t) = \sum_n A_n \cos(\omega_n \cdot t + \varphi_n) \cdot \sin(k_n \cdot x)$$

Les coefficients A_n et φ_n se déterminent à partir des conditions initiales.

$$y(x, t = 0) = \sum_n A_n \cos(\varphi_n) \cdot \sin(k_n \cdot x)$$

Il suffit de faire le Développement en Série de Fourier de la condition initiale sur les modes propres.

Exemple : $y(x, t) = \sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
 - Régime libre.
 - Régime forcé.
- 4 Onde dans une ligne bifilaire.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 Conclusion.

La corde est fixée à une extrémité et excitée par un vibreur.
Les conditions aux limites sont donc :

$$y(x = 0, t) = a_0 \cdot \cos(\omega_e \cdot t) \text{ et } y(x = L, t) = 0 \forall t$$

Il est donc judicieux de chercher la solution sous forme d'onde stationnaire :

$$a(x, t) = A \cos(\omega_e \cdot t + \varphi) \cdot \cos(k \cdot x + \psi)$$

En régime linéaire, la pulsation de l'onde incidente est imposée par le générateur. Une fois exploitée, ces Conditions aux Limites conduisent à :

$$y(x, t) = \frac{a}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \sin(kL - kx)$$

La corde est fixée à une extrémité et excitée par un vibreur.
Les conditions aux limites sont donc :

$$y(x = 0, t) = a_0 \cdot \cos(\omega_e \cdot t) \text{ et } y(x = L, t) = 0 \forall t$$

La solution est alors :

$$y(x, t) = \frac{a}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \sin(kL - kx)$$

Pour $\omega = \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$, l'amplitude diverge : résonance en élongation.

Cette divergence est non physique. Mais deux éléments, non pris en compte ici, explique la limitation de l'amplitude.

- ① Les frottements limitent l'amplitude à la résonance.
En effet la résonance en élongation n'est finie qu'en présence de frottement.
- ② Les effets non linéaires, non pris en compte dans la modélisation, limite l'amplitude des oscillations.
Le modèle établi pour des "petits mouvements" cesse de s'appliquer.

Onde pour la corde fixée à une extrémité et excitée par un vibreur.

$$y(x, t) = \frac{a}{\sin(kL)} \cos(\omega t) \sin(kL - kx)$$

Pour $\omega = \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$, l'amplitude devient grande, observable à l'oeil expérimentalement :

résonance en élongation.

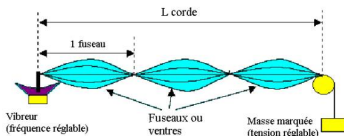


FIGURE – Excitation d'un (seul) mode propre de la corde de Melde.

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 **Onde dans une ligne bifilaire.**
 - **Description et modélisation de la situation.**
 - Equation du télégraphiste.
 - Solution sous forme d'onde plane progressive harmonique, impédance complexe.
 - Solution selon les conditions aux limites.
 - Aspect énergétique de la propagation.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 Conclusion.



FIGURE – Câble Coaxial avec les deux "fils".

Plutôt que d'étudier le point de vue onde électromagnétique dans le câble, il est possible d'avoir recours à un modèle "électrique" :

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale (sans perte) est alors modélisée comme suit :

- 1 une inductance $l \cdot dx$, où l désigne une inductance linéique, en $H \cdot m^{-1}$.

Cette inductance est à relier à l'énergie magnétique de l'onde véhiculée.

La structure du "fil" extérieur peut par ailleurs rappeler un peu celle d'une bobine.

- 2 une capacité $c \cdot dx$, où c désigne une capacité linéique, en $F \cdot m^{-1}$.

Cette capacité est à relier à l'énergie électrique de l'onde véhiculée.

Le fait que le câble soit composé de deux armatures métalliques se faisant face explique la présence de ce terme capacitif.



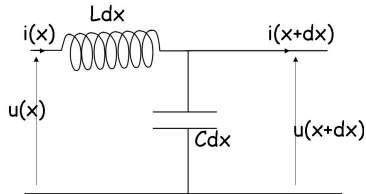


FIGURE – Modèle d'une tranche dx de câble coaxial idéal .

Il est possible d'appliquer les lois de l'ARQS, bien que l'on souhaite étudier un phénomène ondulatoire, dans la mesure où la longueur dx peut être choisie arbitrairement très petite. Le temps τ de propagation de l'onde sur la tranche dx est $\frac{dx}{c}$ que l'on souhaite dans l'ARQS très inférieur à la période temporelle T de l'onde.

$$\frac{dx}{c} \ll T$$

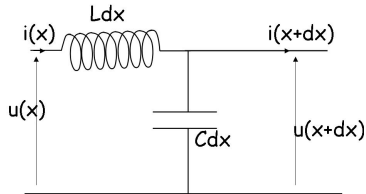


FIGURE – Modèle d'une tranche dx de câble coaxial idéal .

La loi des mailles donne

$$u(x, t) = l \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + u(x + dx, t)$$

La loi des noeuds (à l'ordre 1 en dx) donne

$$i(x, t) = c \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + i(x, t)$$

La loi des mailles donne

$$u(x, t) = l \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + u(x + dx, t)$$

La loi des noeuds (à l'ordre 1 en dx) donne

$$i(x, t) = c \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + i(x, t)$$

Par un développement limité à l'ordre 1 en dx , ordre le plus bas non nul :

$$\frac{\partial i}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + l \frac{\partial i}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Les équations du problème sont des **équations couplées du premier ordre**.

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 **Onde dans une ligne bifilaire.**
 - Description et modélisation de la situation.
 - **Equation du télégraphiste.**
 - Solution sous forme d'onde plane progressive harmonique, impédance complexe.
 - Solution selon les conditions aux limites.
 - Aspect énergétique de la propagation.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 Conclusion.

Pour trouver l'équation dont $u(x, t)$ et $i(x, t)$ sont solution, il faut passer à des **équations découplées du second ordre**.

Dès lors, il faut être conscient que ces équations de propagation seront des Conditions Nécessaires mais non Suffisantes puis que l'information sur le couplage n'est plus traduite.

Pour trouver l'équation de propagation de la tension $u(x, t)$, il faut dériver (1) par rapport à t $\frac{\partial(1)}{\partial t}$ et dériver (2) par rapport à x $\frac{\partial(2)}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} + c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial(1)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + l \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \quad (2) \frac{\partial(2)}{\partial x}$$

puis sachant que $\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$ (théorème de Schwartz), le terme dépendant de $i(x, t)$ est éliminé et il vient :

$$\square u = \Delta u - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec } c_0 = \frac{1}{\sqrt{lc}}$$

Equation de propagation de $u(x, t)$ et $i(x, t)$

$$\square u = \Delta u - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c_0 = \frac{1}{\sqrt{lc}}$$

De même, il viendrait :

$$\square i = 0$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{lc}}$$

La célérité de l'onde est homogène à une vitesse, sachant que dans un circuit LC, $\frac{1}{\sqrt{lc}}$ est homogène à des s^{-1} et qu'ici l et c sont des grandeurs linéiques.

La célérité de l'onde augmente lorsque $\frac{1}{c}$, équivalent électromécanique de la raideur du milieu, augmente.

La célérité de l'onde diminue lorsque l , équivalent électromécanique de l'inertie du milieu, augmente.

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 **Onde dans une ligne bifilaire.**
 - Description et modélisation de la situation.
 - Equation du télégraphiste.
 - **Solution sous forme d'onde plane progressive harmonique, impédance complexe.**
 - Solution selon les conditions aux limites.
 - Aspect énergétique de la propagation.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 Conclusion.

Cherchons des solutions sous forme d'Onde Plane Progressive Harmonique.

$$\underline{u}(x, t) = u_0 \exp(j\omega.t - k.x + \varphi) \text{ et } \underline{i}(x, t) = \underline{i}_0 \exp(j\omega.t - k.x + \varphi) \underline{i}_0 = i_0 \exp(j\varphi)$$

La tension u est prise comme origine des phases et donc le courant i est déphasé.

Si l'équation de d'Alembert assure que la $k = \frac{\omega}{c}$, il manque une information sur le couplage, le lien entre les deux grandeurs électriques.

L'équation de d'Alembert est une équation découplé du second ordre mais "oublie" le couplage trouvée dans les équations du premier ordre.

L'équation de d'Alembert est une condition nécessaire mais pas suffisante.

Nous allons maintenant chercher ce lien pour les ondes planes progressives harmoniques.

La traduction de l'une des deux équations couplées conduit à :

$$\underline{u}(x, t) = \sqrt{\frac{l}{c}} \cdot \underline{i}(x, t)$$

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 **Onde dans une ligne bifilaire.**
 - Description et modélisation de la situation.
 - Equation du télégraphiste.
 - Solution sous forme d'onde plane progressive harmonique, impédance complexe.
 - **Solution selon les conditions aux limites.**
 - Aspect énergétique de la propagation.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 Conclusion.

Etude d'une ligne infinie avec une OPPH incidente de $-\infty$.

Etude d'une ligne infinie avec une OPPH incidente de $-\infty$.

Solution OPPH seule :

$$u(x, t) = u_0 \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

$$i(x, t) = \frac{u_0}{Z} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

Etude d'une ligne semi infinie, fermée par un court circuit en $x = 0$ avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL : } u(x = 0, t) = 0 \forall t$$

Etude d'une ligne semi infinie, fermée par un court circuit en $x = 0$ avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL : } u(x = 0, t) = 0 \forall t$$

Solution OPPH incidente :

$$u_i(x, t) = u_{0i} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

$$i_i(x, t) = \frac{u_{0i}}{Z} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

Mais l'OPPH incidente ne vérifie pas la CL, il y a donc nécessité d'une onde réfléchie.

$$u_r(x, t) = u_{0r} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

$$i_i(x, t) = -\frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

La pulsation est restée la même car il n'y a pas d'élément non linéaire lors de la réflexion, donc même k .

Onde régressive d'amplitude et de déphasage à déterminer.

(Onde régressive donc impédance $-Z$ entre u_r et i_r).

Etude d'une ligne semi infinie, fermée par un court circuit en $x = 0$ avec une OPPH incidente de $-\infty$.

CL : $u(x = 0, t) = 0 \forall t$

Solution OPPH incidente :

$$u_i(x, t) = u_{0i} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

$$i_i(x, t) = \frac{u_{0i}}{Z} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

Mais l'OPPH incidente ne vérifie pas la CL, il y a donc nécessité d'une onde réfléchie.

$$u_r(x, t) = u_{0r} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

$$i_r(x, t) = -\frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

La pulsation est restée la même car il n'y a pas d'élément non linéaire lors de la réflexion, donc même k .

Onde régressive d'amplitude et de déphasage à déterminer.

(Onde régressive donc impédance $-Z$ entre u_r et i_r).

Avec les CL, il vient $u_{0r} \cdot \cos(\omega t + \varphi_r) + u_{0i} \cdot \cos(\omega t) = 0$

Soit $u_{0r} = u_{0i}$ et $\varphi_r = \pi$.

Etude d'une ligne semi infinie, fermée par un court circuit en $x = 0$ avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL : } u(x = 0, t) = 0 \forall t$$

Solution OPPH incidente :

$$u_i(x, t) = u_{0i} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

$$i_i(x, t) = \frac{u_{0i}}{Z} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

Mais l'OPPH incidente ne vérifie pas la CL, il y a donc nécessité d'une onde réfléchie.

$$u_r(x, t) = u_{0r} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

$$i_r(x, t) = -\frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

La pulsation est restée la même car il n'y a pas d'élément non linéaire lors de la réflexion, donc même k .

Onde régressive d'amplitude et de déphasage à déterminer.

(Onde régressive donc impédance $-Z$ entre u_r et i_r).

Avec les CL, il vient $u_{0r} \cdot \cos(\omega t + \varphi_r) + u_{0i} \cdot \cos(\omega t) = 0$

Soit $u_{0r} = u_{0i}$ et $\varphi_r = \pi$.

Finalement il existe des onde stationnaires dans la ligne.

$$u_{\text{toy}}(x, t) = 2 \cdot u_{0i} \cdot \sin(\omega t) \sin(k \cdot x)$$

$$i_{\text{toy}}(x, t) = 2 \cdot \frac{u_{0i}}{Z} \cdot \cos(\omega t) \cos(k \cdot x)$$

Ondes de tension et courant en quadrature spatiale et temporelle.



Etude d'une ligne semi infinie, fermée par un coupe circuit en $x = 0$ avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL : } i(x = 0, t) = 0 \forall t$$

Etude d'une ligne semi infinie, fermée par un coupe circuit en $x = 0$ avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL : } i(x = 0, t) = 0 \forall t$$

Solution OPPH incidente :

$$u_i(x, t) = u_{0i} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

$$i_i(x, t) = \frac{u_{0i}}{Z} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

Mais l'OPPH incidente ne vérifie pas la CL, il y a donc nécessité d'une onde réfléchie.

$$u_r(x, t) = u_{0r} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

$$i_i(x, t) = -\frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

La pulsation est restée la même car il n'y a pas d'élément non linéaire lors de la réflexion, donc même k .

Onde régressive d'amplitude et de déphasage à déterminer.

(Onde régressive donc impédance $-Z$ entre u_r et i_r).

Etude d'une ligne semi infinie, fermée par un coupe circuit en $x = 0$ avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL} : i(x = 0, t) = 0 \forall t$$

Solution OPPH incidente :

$$u_i(x, t) = u_{0i} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

$$i_i(x, t) = \frac{u_{0i}}{Z} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

Mais l'OPPH incidente ne vérifie pas la CL, il y a donc nécessité d'une onde réfléchie.

$$u_r(x, t) = u_{0r} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

$$i_r(x, t) = -\frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

La pulsation est restée la même car il n'y a pas d'élément non linéaire lors de la réflexion, donc même k .

Onde régressive d'amplitude et de déphasage à déterminer.

(Onde régressive donc impédance $-Z$ entre u_r et i_r).

Avec les CL, il vient $-\frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_r) + \frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t) = 0$

Soit $u_{0r} = u_{0i}$ et $\varphi_r = 0$.

Etude d'une ligne semi infinie, fermée par un coupe circuit en $x = 0$ avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$CL : i(x = 0, t) = 0 \forall t$$

Solution OPPH incidente :

$$u_i(x, t) = u_{0i} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

$$i_i(x, t) = \frac{u_{0i}}{Z} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

Mais l'OPPH incidente ne vérifie pas la CL, il y a donc nécessité d'une onde réfléchie.

$$u_r(x, t) = u_{0r} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

$$i_r(x, t) = -\frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

La pulsation est restée la même car il n'y a pas d'élément non linéaire lors de la réflexion, donc même k .

Onde régressive d'amplitude et de déphasage à déterminer.

(Onde régressive donc impédance $-Z$ entre u_r et i_r).

Avec les CL, il vient $-\frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_r) + \frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t) = 0$

Soit $u_{0r} = u_{0i}$ et $\varphi_r = 0$.

Finalement il existe des onde stationnaires dans la ligne.

$$u_{toy}(x, t) = 2 \cdot u_{0i} \cdot \cos(\omega t) \cos(k \cdot x)$$

$$i_{toy}(x, t) = 2 \cdot \frac{u_{0i}}{Z} \cdot \sin(\omega t) \sin(k \cdot x)$$

Ondes de tension et courant en quadrature spatiale et temporelle.



Etude d'une ligne semi infinie, fermée sur une résistance R en $x = 0$ avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL : } u(x = 0, t) = R.i(x = 0, t) \forall t$$

Etude d'une ligne semi infinie, fermée sur une résistance R en $x = 0$ avec une OPPH incidente de $-\infty$.

CL : $u(x = 0, t) = R.i(x = 0, t) \forall t$

Solution OPPH incidente :

$$u_i(x, t) = u_{0i} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

$$i_i(x, t) = \frac{u_{0i}}{Z} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

Mais l'OPPH incidente ne vérifie pas la CL dans le cas général, il y a donc nécessité d'une onde réfléchie, sauf si $Z=R$. (cas étudié et commenté après.)

$$u_r(x, t) = u_{0r} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

$$i_r(x, t) = -\frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

La pulsation est restée la même car il n'y a pas d'élément non linéaire lors de la réflexion, donc même k .

Onde régressive d'amplitude et de déphasage à déterminer.

(Onde régressive donc impédance $-Z$ entre u_r et i_r).

Etude d'une ligne semi infinie, fermée sur une résistance R en $x = 0$ avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL : } u(x = 0, t) = R \cdot i(x = 0, t) \forall t$$

Solution OPPH incidente :

$$u_i(x, t) = u_{0i} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

$$i_i(x, t) = \frac{u_{0i}}{Z} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

Mais l'OPPH incidente ne vérifie pas la CL dans le cas général, il y a donc nécessité d'une onde réfléchie, sauf si $Z=R$. (cas étudié et commenté après.)

$$u_r(x, t) = u_{0r} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

$$i_r(x, t) = -\frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

La pulsation est restée la même car il n'y a pas d'élément non linéaire lors de la réflexion, donc même k.

Onde régressive d'amplitude et de déphasage à déterminer.

(Onde régressive donc impédance $-Z$ entre u_r et i_r).

Avec les CL, et en passant aux complexes, il vient

$$\underline{u}_{0r} \cdot \exp j(\omega t) + u_{0i} \cdot \exp j(\omega t) = R \left(\frac{u_{0i}}{Z} \cdot \exp j(\omega t) - \frac{\underline{u}_{0r}}{Z} \cdot \exp j(\omega t) \right)$$

$$\text{Soit } \underline{u}_{0r} = \frac{R-Z}{R+Z} \cdot u_{0i}$$

Étude d'une ligne semi infinie, fermée sur une résistance R en $x = 0$ avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL : } u(x = 0, t) = R \cdot i(x = 0, t) \forall t$$

Solution OPPH incidente :

$$u_i(x, t) = u_{0i} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

$$i_i(x, t) = \frac{u_{0i}}{Z} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

Mais l'OPPH incidente ne vérifie pas la CL dans le cas général, il y a donc nécessité d'une onde réfléchie, sauf si $Z=R$. (cas étudié et commenté après.)

$$u_r(x, t) = u_{0r} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

$$i_r(x, t) = -\frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

$$\text{où } u_{0r} = \frac{R-Z}{R+Z} \cdot u_{0i}$$

Étude d'une ligne semi infinie, fermée sur une résistance R en $x = 0$ avec une OPPH incidente de $-\infty$.

CL : $u(x = 0, t) = R \cdot i(x = 0, t) \forall t$

Solution OPPH incidente :

$$u_i(x, t) = u_{0i} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

$$i_i(x, t) = \frac{u_{0i}}{Z} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x)$$

Mais l'OPPH incidente ne vérifie pas la CL dans le cas général, il y a donc nécessité d'une onde réfléchie, sauf si $Z=R$. (cas étudié et commenté après.)

$$u_r(x, t) = u_{0r} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

$$i_r(x, t) = -\frac{u_{0r}}{Z} \cdot \cos(\omega t + k \cdot x + \varphi_r)$$

où $u_{0r} = \frac{R-Z}{R+Z} \cdot u_{0i}$.

Analysons le résultat. Commençons par retrouver les cas limites vus précédemment.

Si $R = 0$, i.e. le cas du court circuit $u_{0r} = -u_{0i}$, ce qui permet de retrouver le cas précédent.

Si $R = \infty$, i.e. le cas du coupe circuit $u_{0r} = u_{0i}$, ce qui permet aussi de retrouver le cas précédent.

Dans le cas général, l'onde n'est que partiellement réfléchie et donc l'onde ne sera pas complètement stationnaire.

La cas $Z = R$ est intéressant car il montre que n'est pas réfléchi dans ce cas. On parle d'adaptation d'impédance de la sortie à la ligne.

Étude du raccordement de deux lignes semi infinies, d'impédance Z_1 et Z_2 respectives, de vitesse c_1 et c_2 avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL} : u(x = 0^-, t) = u(x = 0^+, t) \forall t$$

$$i(x = 0^-, t) = i(x = 0^+, t) \forall t$$

Étude du raccordement de deux lignes semi infinies, d'impédance Z_1 et Z_2 respectives, de vitesse c_1 et c_2 avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL : } u(x = 0^-, t) = u(x = 0^+, t) \forall t$$

$$i(x = 0^-, t) = i(x = 0^+, t) \forall t$$

Solution OPPH incidente :

$$u_i(x, t) = u_{0i} \cdot \cos(\omega t - k_1 \cdot x)$$

$$i_i(x, t) = \frac{u_{0i}}{Z_1} \cdot \cos(\omega t - k_1 \cdot x)$$

Nécessité d'une onde réfléchiée et d'une onde transmise

$$u_r(x, t) = u_{0r} \cdot \cos(\omega t + k_1 \cdot x + \varphi_r)$$

$$i_i(x, t) = -\frac{u_{0r}}{Z_1} \cdot \cos(\omega t + k_1 \cdot x + \varphi_r)$$

$$u_t(x, t) = u_{0t} \cdot \cos(\omega t - k_2 \cdot x + \varphi_t)$$

$$i_t(x, t) = -\frac{u_{0r}}{Z_2} \cdot \cos(\omega t - k_2 \cdot x + \varphi_t)$$

La pulsation est restée la même car il n'y a pas d'élément non linéaire, mais attention le vecteur d'onde dépend du milieu.

Étude du raccordement de deux lignes semi infinies, d'impédance Z_1 et Z_2 respectives, de vitesse c_1 et c_2 avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL : } u(x = 0^-, t) = u(x = 0^+, t) \forall t$$

$$i(x = 0^-, t) = i(x = 0^+, t) \forall t$$

Solution OPPH incidente :

$$u_i(x, t) = u_{0i} \cdot \cos(\omega t - k_1 \cdot x)$$

$$i_i(x, t) = \frac{u_{0i}}{Z_1} \cdot \cos(\omega t - k_1 \cdot x)$$

Nécessité d'une onde réfléchie et d'une onde transmise

$$u_r(x, t) = u_{0r} \cdot \cos(\omega t + k_1 \cdot x + \varphi_r)$$

$$i_r(x, t) = -\frac{u_{0r}}{Z_1} \cdot \cos(\omega t + k_1 \cdot x + \varphi_r)$$

$$u_t(x, t) = u_{0t} \cdot \cos(\omega t - k_2 \cdot x + \varphi_t)$$

$$i_t(x, t) = -\frac{u_{0t}}{Z_2} \cdot \cos(\omega t - k_2 \cdot x + \varphi_t)$$

La pulsation est restée la même car il n'y a pas d'élément non linéaire, mais attention le vecteur d'onde dépend du milieu.

Avec les CL, et en passant aux complexes il vient

$$\underline{u}_{0r} + \underline{u}_{0i} = \underline{u}_{0t}$$

$$\frac{1}{Z_1} \cdot (\underline{u}_{0r} - \underline{u}_{0i}) = \frac{1}{Z_2} \cdot \underline{u}_{0t}$$

Étude du raccordement de deux lignes semi infinies, d'impédance Z_1 et Z_2 respectives, de vitesse c_1 et c_2 avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL} : u(x = 0^-, t) = u(x = 0^+, t) \forall t$$

$$i(x = 0^-, t) = i(x = 0^+, t) \forall t$$

$$\underline{u}_{0r} + \underline{u}_{0i} = \underline{u}_{0t}$$

$$\frac{1}{Z_1} \cdot (\underline{u}_{0r} - \underline{u}_{0i}) = \frac{1}{Z_2} \cdot \underline{u}_{0t}$$

Étude du raccordement de deux lignes semi infinies, d'impédance Z_1 et Z_2 respectives, de vitesse c_1 et c_2 avec une OPPH incidente de $-\infty$.

$$\text{CL : } u(x = 0^-, t) = u(x = 0^+, t) \forall t$$

$$i(x = 0^-, t) = i(x = 0^+, t) \forall t$$

$$\underline{u}_{0r} + u_{0i} = \underline{u}_{0t}$$

$$\frac{1}{Z_1} \cdot (\underline{u}_{0r} - u_{0i}) = \frac{1}{Z_2} \cdot \underline{u}_{0t}$$

Finalement :

$$\underline{u}_{0r} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} u_{0i}$$

$$\underline{u}_{0t} = \frac{2 \cdot Z_2}{Z_2 + Z_1} u_{0i}$$

Une partie de l'onde est réfléchiée, sauf si les impédances des deux lignes sont adaptées.
L'onde transmise est toujours en phase avec l'onde incidente.

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 **Onde dans une ligne bifilaire.**
 - Description et modélisation de la situation.
 - Equation du télégraphiste.
 - Solution sous forme d'onde plane progressive harmonique, impédance complexe.
 - Solution selon les conditions aux limites.
 - **Aspect énergétique de la propagation.**
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 Conclusion.

Passage aux équations de puissance :

$$\frac{\partial i}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (1).v$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + l \frac{\partial i}{\partial t} = 0 \quad (2).i$$

Et en les sommant, il vient l'équation de puissance suivante :

$$\frac{\partial v.i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} li^2 + \frac{1}{2} cv^2 \right) = 0$$

Passage aux équations de puissance :

$$\frac{\partial i}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (1).v$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + l \frac{\partial i}{\partial t} = 0 \quad (2).i$$

Et en les sommant, il vient l'équation de puissance suivante :

$$\frac{\partial v.i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} li^2 + \frac{1}{2} cv^2 \right) = 0$$

Interprétation :

Le terme $\frac{\partial v.i}{\partial x}$ est la différence entre la puissance $v.i$ sortante en $x+dx$ et la puissance entrante en x .

Cette variation de puissance dans la tranche dx est lié à la variation (temporelle) de l'énergie linéique dans le condensateur et la bobine de la tranche dx .

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 Onde dans une ligne bifilaire.
- 5 **Exemple d'une onde sonore dans un solide.**
 - **Description et modélisation de la situation.**
 - Approximation des milieux continus et équation de d'Alembert.
- 6 Conclusion.

On considère une chaîne infinie d'atomes de masse m , séparés par des ressorts de longueur à vide d et de raideur k . La distance entre les atomes au repos est d et la masse le déplacement du $n^{ième}$ atome par rapport à la position d'équilibre est noté $\xi_n(t)$.

Ce modèle permet d'étudier la propagation d'une onde sonore (ou de toute onde de compression, comme les ondes sismiques P) dans un solide.

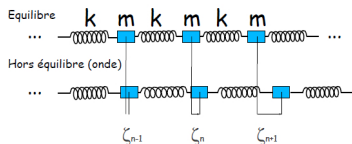


FIGURE – Modélisation de l'interaction entre les atomes d'un solide.

On considère une chaîne infinie d'atomes de masse m , séparés par des ressorts de longueur à vide d et de raideur k . La distance entre les atomes au repos est d et la masse le déplacement du $n^{\text{ième}}$ atome par rapport à la position d'équilibre est noté $\xi_n(t)$.

Ce modèle permet d'étudier la propagation d'une onde sonore (ou de toute onde de compression, comme les ondes sismiques P) dans un solide.

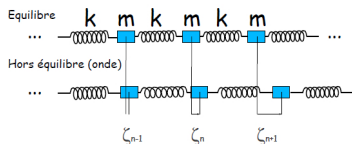


FIGURE – Modélisation de l'interaction entre les atomes d'un solide.

le modèle adopté du ressort pour les interactions entre atomes.
l'équation vérifiée par $\xi_n(t)$ est

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -k(2\xi_n - \xi_{n+1} - \xi_{n-1})$$

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 Onde dans une ligne bifilaire.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.**
 - Description et modélisation de la situation.
 - **Approximation des milieux continus et équation de d'Alembert.**
- 6 Conclusion.

Faire l'approximation des milieux continus.

La distance entre deux atomes dans un cristal est de l'ordre de 10^{-10} m, distance très inférieure au longueur d'onde étudiée.

D'où l'on définit une fonction $\xi(x, t)$ de l'espace et du temps par la relation suivante :

$$\xi(x = nd, t) = \xi_n(t).$$

Montrer alors que l'équation ci dessus devient :

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -k(2\xi(x, t) - \xi(x + d, t) - \xi(x - d, t))$$

Faire un développement limité de $\xi(x + d, t)$ et $\xi(x - d, t)$ à l'ordre 2 (en justifiant la nécessité de faire le DL à cet ordre.)

En déduire alors l'équation de propagation de $\xi(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{kd^2}{m}$$

Plan

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
- 4 Onde dans une ligne bifilaire.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
- 6 **Conclusion.**
 - Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons rencontrés diverses ondes :

- les **ondes transversales**, avec la corde de Melde.
La perturbation $y(x, t)$ se trouve dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation \vec{u}_x .
Cette onde est aussi parfois appelé onde de cisaillement.
- les **ondes longitudinales**, avec l'onde sonore dans les solides.
La perturbation $\xi(x, t)$ se trouve dans la même direction que la propagation \vec{u}_x .
Cette onde est une onde de compression.
- les **ondes de torsions**, en exercice.
La perturbation $\theta(x, t)$ est une rotation autour de la direction de propagation \vec{u}_x .

- 1 Équation de propagation d'onde dans la corde vibrante de Melde.
 - Description et modélisation de la situation.
 - Equation de propagation de l'onde.
- 2 L'équation d'onde de d'Alembert.
 - Solutions sous forme d'onde plane progressive harmonique.
 - Solutions sous forme d'onde plane stationnaire.
 - Lien entre les diverses solutions.
- 3 Ondes dans la corde vibrante.
 - Régime libre.
 - Régime forcée.
- 4 Onde dans une ligne bifilaire.
 - Description et modélisation de la situation.
 - Equation du télégraphiste.
 - Solution sous forme d'onde plane progressive harmonique, impédance complexe.
 - Solution selon les conditions aux limites.
 - Aspect énergétique de la propagation.
- 5 Exemple d'une onde sonore dans un solide.
 - Description et modélisation de la situation.
 - Approximation des milieux continus et équation de d'Alembert.
- 6 Conclusion.
 - Conclusion.