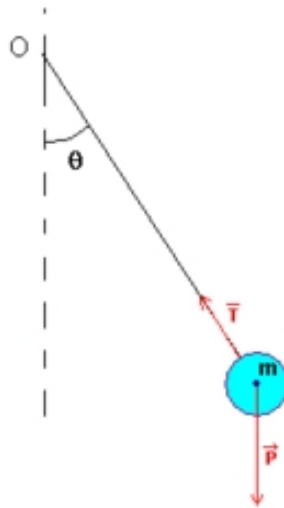


Mécanique du point. Agrégation

Ph. Ribière

Samedi 08 octobre 2011

1 L'oscillateur sous toutes ses formes.



Une masse m , assimilée à un point matériel, est accrochée à une tige de longueur l et masse négligeable, elle même accrochée au plafond (par une liaison pivot parfait) en un point O . A l'instant $t = 0$, la masse m est écartée de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 par rapport à la verticale et lâchée sans vitesse initiale.

1. Par analyse dimensionnelle, et sans calcul, déterminer la période des oscillations T en supposant qu'elle ne dépend que de g , l'accélération de pesanteur, de l et de m .
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, trouver l'équation dont est solution $\theta(t)$.
3. Dans l'hypothèse des petits mouvements, simplifier et résoudre cette équation. Retrouver la période T des oscillations.
4. En appliquant le théorème du moment cinétique en O , retrouver une fois encore l'équation établie au 1. Pourquoi est il intéressant de calculer le TMC en O ?

5. Retrouver l'équation établie au 1 par une étude énergétique.
6. De l'équation énergétique, déduire sans approximation la période T des oscillations en fonction de θ_0 .
7. Discuter les positions d'équilibres à partir de l'étude énergétique.
8. Commenter le portrait de phase (Courbe paramétrée dans plan de phase : $\dot{\theta}$ en fonction de θ). cf figure 1.
9. ★ Faire une étude perturbative de l'équation différentielle non linéaire en cherchant des solutions de la forme : $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$
Montrer l'enrichissement du spectre dû aux non linéarités.
Montrer enfin que la période des oscillations pour de plus grand mouvement n'est pas isochrone et que $T \simeq T_0(1 + \theta_0^2/16)$ au premier ordre.

Le pendule pesant

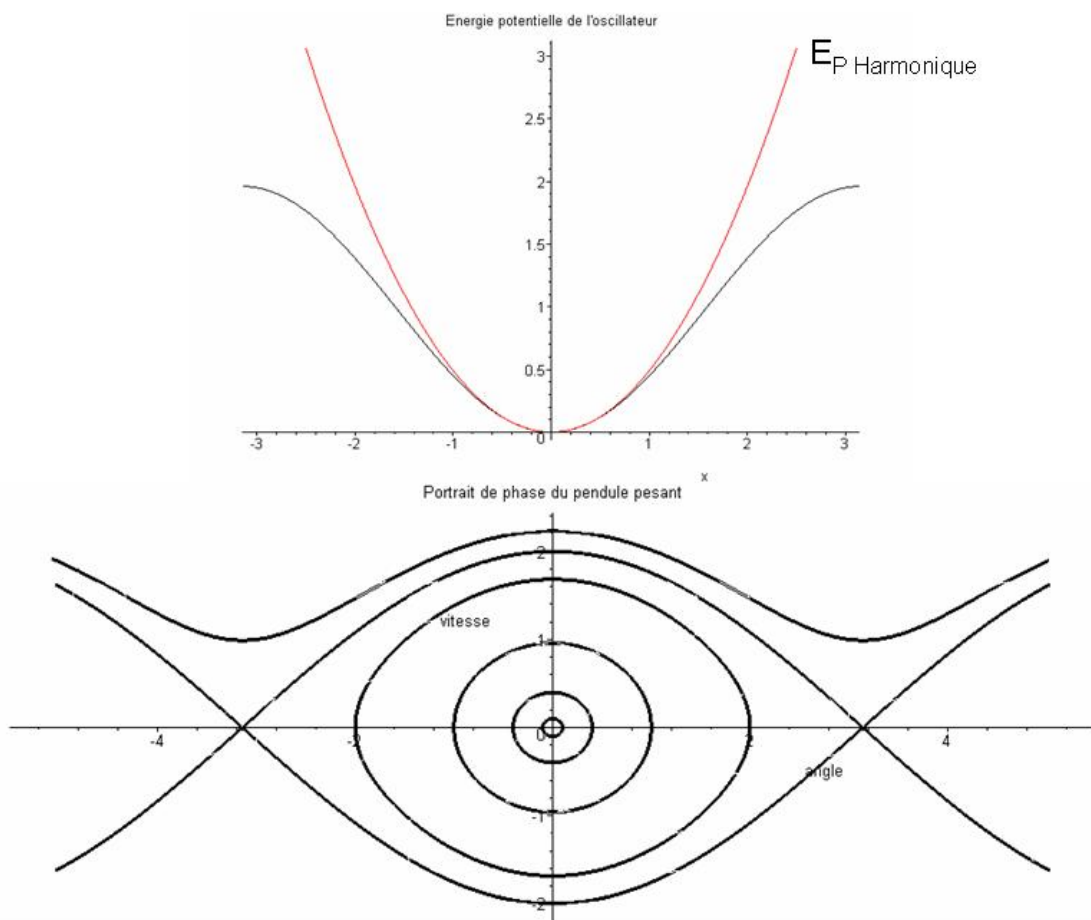


FIGURE 1 – interprétation énergétique de l'énergie.

2 Etude d'un système binaire : étoile double.

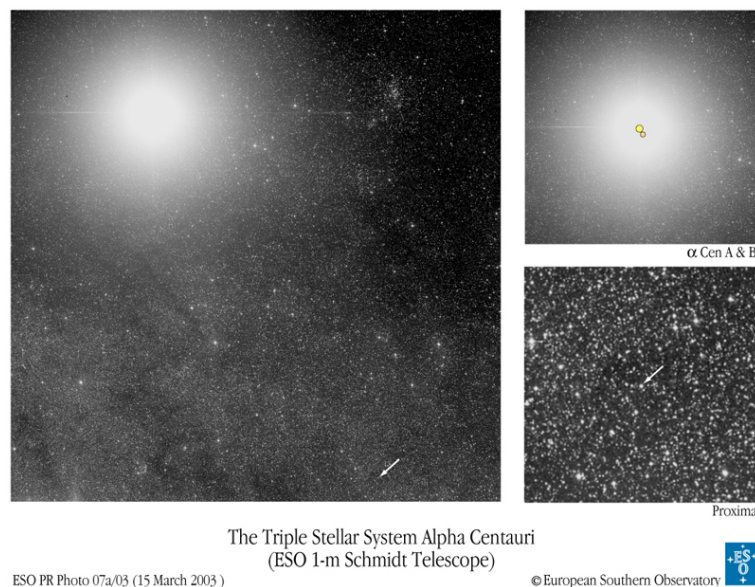
En astronomie observationnelle, une étoile double est une paire d'étoiles qui apparaissent comme proches l'une de l'autre dans le ciel, lorsqu'on les observe depuis la Terre, à travers un télescope optique.

Ceci peut se produire :

parce que la paire forme un système binaire d'étoiles en orbite mutuelles (i.e. elles tournent chacune autour de l'autre, ou plus précisément, elles tournent toutes deux autour du barycentre ? le centre de gravité - du système qu'elles constituent), elles sont liées gravitationnellement l'une à l'autre, ce qui est le cas étudié par la suite ;

ou parce que la paire d'étoiles forme un « double optique », un alignement dû au hasard de deux étoiles, qui se trouvent dans le ciel à des distances différentes, mais qui sont vues sous le même angle de visée depuis la Terre.

Dans ce problème l'étude se concentre sur le système Alpha Centauri ou Alpha du Centaure (ou Rigil Kentaurus ou Rigil Kentarus ou Toliman ou Bungula) qui est un système de trois étoiles très proches : Alpha Centauri A et Alpha Centauri B sont les deux étoiles principales qui forment une étoile double, et Proxima Centauri est une naine rouge beaucoup moins lumineuse, qui est l'étoile la plus proche du Soleil mais qui est ici négligé compte tenu de sa faible masse comparé aux deux autres étoiles. À l'oeil nu, ce système apparaît comme l'étoile la plus brillante de la constellation du Centaure et la troisième plus brillante de tout le ciel. Alpha Centauri est trop au sud pour être visible dans la majeure partie de l'hémisphère nord.



Le système est situé à environ 4,22 années-lumière, soit 270 000 fois la distance entre la Terre et le Soleil. La masse M des deux étoiles du système double est supposé identique, $M = 1,1 M_S$. Elles orbitent l'une autour de l'autre sur une période de 80 ans, leur éloignement variant de 11,2 à 35,6 UA.

On souhaite étudier le système composé de Alpha Centauri A et Alpha Centauri B, système isolé dans le référentiel astronomique R_a galiléen.

1. Donner en ordre de grandeur la taille du rayon des étoiles Alpha Centauri A et B en fonction du rayon du soleil sachant que la composition de ces étoiles est identique au soleil et que $M = 1,1.M_S$.
2. Etudier le mouvement du centre de gravité du système dans le référentiel R_a
3. Rappeler la définition du référentiel barycentrique R^* .
4. Montrer que le référentiel barycentrique est galiléen.
5. Rappeler la définition du point fictif M associé au système binaire des étoiles et calculer la masse de ce point en fonction de M_S .
6. Faire un schéma faisant apparaître A (Alpha Centauri A), B (Alpha Centauri B), le point fictif M et le barycentre G.
7. Montrer que le point fictif est soumis à une force centrale conservative newtonienne.
8. Montrer alors que le moment cinétique est invariant mécanique. Quelles conséquences cela a-t-il ?
9. Montrer aussi que l'énergie est une grandeur conservative. Donner une interprétation en terme d'énergie potentielle efficace et distinguer les états liés des états de diffusion. Dans quel cas est-on ici ?
10. Comment démontrer alors que les états liés correspondent des trajectoires elliptiques ? (Aucune démonstration n'est demandée)
11. Sachant que le point fictif décrit une orbite elliptique de période 80 ans, quelle est la nature et la période du mouvement de Alpha Centauri A autour du centre de gravité du système. Ecrire la relation permettant de décrire le mouvement de A et B en fonction du mouvement de M puis faire un schéma qualitatif avec les trajectoires de A, B et M (sans oublier de faire apparaître G).
12. Les deux étoiles orbitent l'une autour de l'autre sur une période de 80 ans, leur éloignement variant de 11,2 à 35,6 UA. Déterminer l'excentricité des trajectoires elliptiques.

Complément sur l'intérêt du système :

Pour les astronomes stellaires, l'importance des étoiles binaires réside dans le fait que la connaissance de leurs mouvements permet de calculer directement la masse des étoiles, ainsi que d'autres paramètres stellaires.

Les observateurs d'étoiles doubles, amateurs aussi bien que professionnels, ont mesuré au télescope les distances et les angles entre les étoiles doubles, pour déterminer les mouvements relatifs des paires. Si le mouvement relatif d'une paire détermine un arc incurvé d'une orbite, ou bien si le mouvement relatif est petit, comparé au mouvement propre commun aux deux étoiles, on peut conclure que la paire est en orbite mutuelle comme deux étoiles binaires. Sinon, il s'agit d'une paire optique.

Alpha du Centaure est une "étoile" spéciale, non à cause de sa proximité du Soleil, mais parce que c'est l'une des rares à avoir des conditions similaires au Soleil. Du point de vue vie, elle est une bonne

candidate.

Des modèles informatiques de formation planétaire suggèrent que des planètes telluriques pourraient se former autour de Alpha Centauri A et B, mais que des planètes gazeuses comme Jupiter et Saturne ne pourraient pas se former car les effets gravitationnels provoqués par l'étoile double empêcheraient cette formation. Étant donné les similarités de ce système stellaire du point de vue type d'étoile, âge, stabilité de l'orbite, il a été suggéré qu'il pourrait détenir les meilleures possibilités de détenir une vie extraterrestre.

Certains croient qu'une planète qui se formerait dans le système d'Alpha Centauri serait très sèche, car on pense que la présence de planètes gazeuses, beaucoup plus massives, est essentielle pour attirer les comètes et donc fournir les planètes telluriques en eau. Ce ne serait pas un problème cependant si Alpha Centauri B jouait le même rôle que les planètes gazeuses pour le Soleil pour Alpha Centauri A, et vice versa. Les deux étoiles ont un bon type spectral pour abriter la vie sur une planète potentielle. Pour avoir une température terrestre, une planète en orbite autour d'Alpha Centauri A devrait se situer à 1,25 UA, soit à mi-chemin entre l'orbite de la Terre et de Mars dans le système solaire. Elle devrait se situer à 0,7 UA, soit l'équivalent de l'orbite de Vénus pour Alpha Centauri B qui est plus froide et moins lumineuse.

On peut dire que Alpha Centauri est le système le plus probable de planètes telluriques et de vie. Il est intéressant de noter la réflexion de Daniel S. Goldin (patron de la NASA) en 1992 : « Imaginez que l'analyse spectroscopique révèle une planète bleue avec une atmosphère d'oxygène juste à 4 années-lumière, autour d'Alpha du Centaure. La demande pour construire un engin spatial serait formulée aussitôt. Quand saurons-nous s'il y a réellement des planètes ? Actuellement, le télescope Hubble recherche leur existence. Un expert de la Nasa, Mike Kaplan, a déclaré, lors d'une conférence à Tolède, en Espagne, qu'une vie extraterrestre serait découverte dans 25 ans.