Dispersion Absorption.

P. Ribière

Collège Stanislas

Année Scolaire 2016/2017

Comme précédemment, les atomes du cristal sont modélisés par une chaine infinie d'atomes avec une interaction de type élastique (de raideur r, loi de Hooke), à laquelle des pertes (linéaires) sont ajoutées, modélisées elles par un frottement fluide $-\alpha\frac{\partial \xi}{\partial t}$.

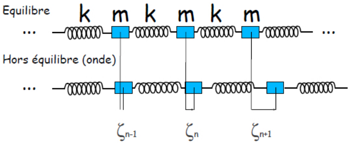


FIGURE – Modélisation de l'interaction entre les atomes d'un solide.

Comme précédemment, les atomes du cristal sont modélisés par une chaine infinie d'atomes avec une interaction de type élastique (de raideur r, loi de Hooke), à laquelle des pertes (linéaires) sont ajoutées, modélisées elles par un frottement fluide $-\alpha\frac{\partial \xi}{\partial t}$.

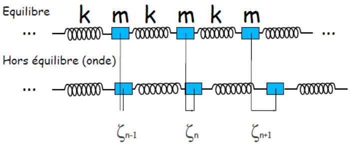


FIGURE – Modélisation de l'interaction entre les atomes d'un solide.

L'équation vérifiée par $\xi_n(t)$ est

$$m\frac{d^2\xi_n}{dt^2} = -r(2\xi_n - \xi_{n+1} - \xi_{n-1}) - f\frac{d\xi_n}{dt}$$

Comme précédemment, les atomes du cristal sont modélisés par une chaine infinie d'atomes avec une interaction de type élastique (de raideur r, loi de Hooke), à laquelle des pertes (linéaires) sont ajoutées, modélisées elles par un frottement fluide $-\alpha \frac{\partial \xi}{\partial t}$.

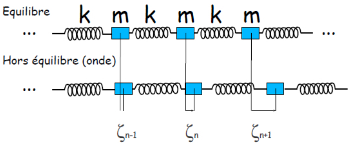


FIGURE – Modélisation de l'interaction entre les atomes d'un solide.

L'équation vérifiée par $\xi_n(t)$ est

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -r(2\xi_n - \xi_{n+1} - \xi_{n-1}) - f \frac{d\xi_n}{dt}$$

L'approximation des milieux continus, liée au fait que la distance d entre deux atomes dans le cristal est de l'ordre de 10^{-10}m, donc très inférieure aux longueurs d'onde étudiées, consiste à définir une fonction $\xi(x,t)$ de l'espace et du temps telle que $\xi(x = nd, t) = \xi_n(t)$.
L'équation devient alors

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\alpha}{rd^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{rd^2}{m}$$

Plan

1. Chaîne infinie d'atomes avec pertes énergétiques.
2. Recherche des solutions sous forme de pseudo OPPH.
   - Relation de dispersion
   - Absorption.
   - Dispersion, vitesse de phase et de groupe.
3. Retour sur la propagation du son dans un solide en présence de pertes.
4. Conclusion

Une fois l'équation de propagation trouvée, les méthodes vues au chapitre précédent, de changement de variable ou de séparation des variables ne fonctionnent pas.

Pseudo Onde Plane Progressive Harmonique.

La résolution consiste à chercher la solution sous forme d'une OPPH complexe, alors appelée pseudo Onde Plane Progressive Harmonique notée OPPH* :

$$\xi(x,t) = Re(\underline{\xi}(x,t)) \quad \text{avec} \quad \underline{\xi}(x,t) = \underline{\xi}_0 . \exp(j\omega t - jk.x)$$

En injectant cette OPPH* dans l'équation de propagation, on trouve l'équation liant k et ω, appelée **relation de dispersion.**

Soit ω soit k est un complexe dans la forme OPPH*.

L'équation de propagation de l'onde sonore avec perte (frottement fluide) est la suivante :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\alpha}{rd^2}\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{rd^2}{m}$$

En cherchant des solutions de type pseudo Onde Plane Progressive Harmonique, OPPH*, la relation de dispersion trouvée est la suivante :

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\alpha}{rd^2} j\omega = 0$$

Si $\alpha = 0$, alors la relation de dispersion est celle de d'Alembert (propagation sans déformation ni atténuation.)

Si $\alpha \neq 0$, alors la relation de dispersion n'est pas celle de d'Alembert. En supposant ω réel, k est complexe, la solution est alors appelée pseudo OPPH notée OPPH*.

La relation de dispersion des ondes sonores avec pertes (linéaires) est la suivante :

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\alpha}{rd^2} j\omega = 0$$

En supposant ω réel, k est complexe.

Pour dégager le contenu physique de la relation de dispersion, posons donc $k(\omega) = k'(\omega) + jk"(\omega)$.

La relation de dispersion des ondes sonores avec pertes (linéaires) est la suivante :

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\alpha}{rd^2} j\omega = 0$$

En supposant ω réel, k est complexe.

Pour dégager le contenu physique de la relation de dispersion, posons donc $k(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$.

Interprétation de la pseudo Onde Plane Progressive Harmonique.

Pour dégager le sens physique de k' et k'', il faut revenir à l'onde en réel.

$$\xi(x,t) = Re(\underline{\xi}(x,t)) = \xi_0 \exp(k''.x) \cos(\omega.t - k'.x - \varphi_0)$$

Plan

Influence de k" sur l'amplitude : absorption.

Le fait que k possède une partie imaginaire $k" \neq 0$ donne naissance à un terme exponentiel réel, qui influe alors sur l'amplitude de l'onde.
Dans la majorité des cas, $k" < 0$, l'amplitude décroît exponentiellement dans l'espace, caractéristique d'un amortissement dû aux pertes énergétiques.
Le milieu est alors dit **absorbant** Le cas de l'amplification, $k" > 0$, est rare mais possible dans les

LASER par exemple.

Revenons au cas le plus fréquent où $k"(\omega) < 0$.
L'absorption s'effectue sur une distance caractéristique

$$d = \frac{1}{|k''|}$$

.
Au delà d'une distance de quelques d, l'onde ne se fait plus sentir.

Exemple : spectrophotométrie : absorption de la lumière par une substance colorée.

Plan

Pour étudier la dispersion, plaçons nous dans la suite dans le cas d'un milieu **transparent**, i.e. sans absorption ni amplification : $k" = 0$.

La phase de la pseudo- Onde Plane Progressive Harmonique est

$$\varphi(x,t) = \omega t - k'x - \varphi_0$$

et elle se propage par définition, à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)}$.

Dispersion.

La vitesse de phase v_φ dépend, dans le cas général, de la pulsation ω de l'onde étudiée, tant et si bien que deux ondes de pulsations différentes n'ont pas la même vitesse de propagation.

Les ondes de pulsation différentes ne se propagent pas de la même manière, elles sont dispersées.

Le milieu est dit **dispersif**.

Pour étudier la dispersion, plaçons nous dans la suite dans le cas d'un milieu **transparent**, i.e. sans absorption ni amplification : $k" = 0$.

La phase de la pseudo- Onde Plane Progressive Harmonique est

$$\varphi(x, t) = \omega t - k' x - \varphi_0$$

et elle se propage par définition, à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)}$.

Dispersion.

La vitesse de phase v_φ dépend, dans le cas général, de la pulsation ω de l'onde étudiée, tant et si bien que deux ondes de pulsations différentes n'ont pas la même vitesse de propagation.

Les ondes de pulsation différentes ne se propagent pas de la même manière, elles sont dispersées.

Le milieu est dit **dispersif**.

Pour bien comprendre le phénomène de dispersion, il ne faut donc pas se contenter d'étudier une seule OPPH* mais une superposition d'OPPH* appelée **paquet d'onde**.

Commençons simplement par l'étude de deux OPPH de pulsation voisine, et pour plus de simplicité, prenons $k" = 0$ (pas d'absorption).

Deux OPPH de pulsation voisine : $\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ avec $\Delta\omega << \omega_0$.
Donc $k'_1 = k'(\omega) = k'_1(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}) = k'(\omega_0) - \frac{\Delta\omega}{2}\frac{dk'}{d\omega}(\omega_0) + ... = k'_0 - \frac{\Delta k'}{2}$
$k'_2 = k(\omega) = k'_1(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}) = k'(\omega_0) + \frac{\Delta\omega}{2}\frac{dk'}{d\omega}(\omega_0) + ... = k'_0 + \frac{\Delta k'}{2}$

Commençons simplement par l'étude de deux OPPH de pulsation voisine, et pour plus de simplicité, prenons $k" = 0$ (pas d'absorption).

Deux OPPH de pulsation voisine : $\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ avec $\Delta\omega << \omega_0$.
Donc $k'_1 = k'(\omega) = k'_1(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}) = k'(\omega_0) - \frac{\Delta\omega}{2}\frac{dk'}{d\omega}(\omega_0) + ... = k'_0 - \frac{\Delta k'}{2}$
$k'_2 = k(\omega) = k'_1(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}) = k'(\omega_0) + \frac{\Delta\omega}{2}\frac{dk'}{d\omega}(\omega_0) + ... = k'_0 + \frac{\Delta k'}{2}$
L'onde résultante de cette superposition s'écrit :

$$\xi(x,t) = A_0\cos(\omega_1.t - k'_1.x) + A_0\cos(\omega_2.t - k'_2.x)$$

$$\xi(x,t) = 2.A_0\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}.t - \frac{k'_2 - k'1}{2}.x)\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}.t - \frac{k'_2 + k'1}{2}.x)$$

$$\xi(x,t) = 2.A_0\cos(\frac{\Delta\omega}{2}.t - \frac{\Delta k'}{2}.x)\cos(\omega_0.t - k'_0.x)$$

$$\xi(x,t) = 2.A_0\cos(\frac{\Delta\omega}{2}.(t - \frac{\Delta k'}{\Delta\omega}.x))\cos(\omega_0.t - k'_0.x)$$

$$\xi(x,t) = 2.A_0\cos(\frac{\Delta\omega}{2}.(t - \frac{dk'}{d\omega}.x))\cos(\omega_0.t - k'_0.x)$$

Commençons simplement par l'étude de deux OPPH de pulsation voisine, et pour plus de simplicité, prenons $k" = 0$ (pas d'absorption).

Deux OPPH de pulsation voisine : $\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ avec $\Delta\omega << \omega_0$.
Donc $k'_1 = k'(\omega) = k'_1(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}) = k'(\omega_0) - \frac{\Delta\omega}{2}\frac{dk'}{d\omega}(\omega_0) + ... = k'_0 - \frac{\Delta k'}{2}$
$k'_2 = k(\omega) = k'_1(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}) = k'(\omega_0) + \frac{\Delta\omega}{2}\frac{dk'}{d\omega}(\omega_0) + ... = k'_0 + \frac{\Delta k'}{2}$
L'onde résultante de cette superposition s'écrit :

$$\xi(x,t) = A_0\cos(\omega_1.t - k'_1.x) + A_0\cos(\omega_2.t - k'_2.x)$$

$$\xi(x,t) = 2.A_0\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.t - \frac{k'_2 - k'1}{2}.x)\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}.t - \frac{k'_2 + k'1}{2}.x)$$

$$\xi(x,t) = 2.A_0\cos(\frac{\Delta\omega}{2}.t - \frac{\Delta k'}{2}.x)\cos(\omega_0.t - k'_0.x)$$

$$\xi(x,t) = 2.A_0\cos(\frac{\Delta\omega}{2}.(t - \frac{\Delta k'}{\Delta\omega}.x))\cos(\omega_0.t - k'_0.x)$$

$$\xi(x,t) = 2.A_0\cos(\frac{\Delta\omega}{2}.(t - \frac{dk'}{d\omega}.x))\cos(\omega_0.t - k'_0.x)$$

Cette expression fait apparaître deux termes :

- l'onde moyenne de pulsation ω_0 qui se propage à la vitesse $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k'_0}$.
- l'enveloppe de l'onde qui se propage à la vitesse de groupe $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$.

Superposition de deux OPPH de pulsation voisine sans absorption.

$$\xi(x,t) = 2.A_0 \cos(\frac{\Delta\omega}{2}.(t - \frac{dk'}{d\omega}.x)) \cos(\omega_0.t - k'_0.x)$$

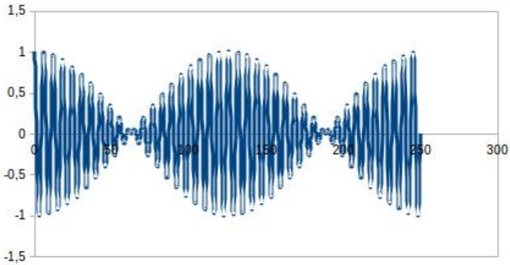


FIGURE – Superposition de deux ondes voisines : battement .

Cette expression fait apparaître deux termes :

- l'onde moyenne de pulsation ω_0 qui se propage à la vitesse $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k'_0}$.
- l'enveloppe de l'onde qui se propage à la vitesse de groupe $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$.

Par ailleurs, l'onde résultante de cette superposition de deux ondes n'est plus, à strictement parlé, d'extension infinie : l'onde commence à **se localiser**.

Regardons l'effet sur la localisation, de la superposition d'ondes de pulsation voisine :

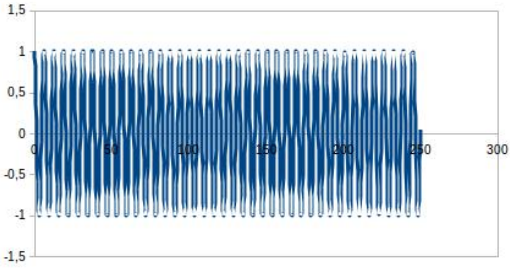


FIGURE – Une Onde Plane Progressive Harmonique .

L'Onde Plane Progressive Harmonique est parfaitement monochromatique et délocalisée, i.e. d'extensin infinie.

Regardons l'effet sur la localisation, de la superposition d'ondes de pulsation voisine :

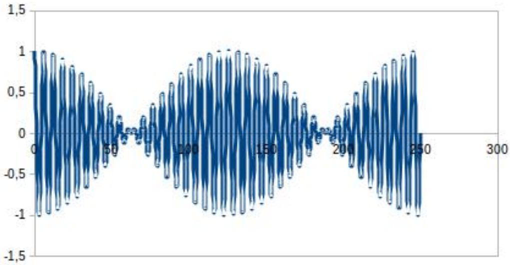


FIGURE – Paquet de deux ondes de pulsation voisine.

La superposition de deux Ondes Planes Progressives Harmoniques n'est plus monochromatique et commence à se localiser, i.e. des annulations apparaisent dans la fonction d'onde.

Regardons l'effet de la superposition d'onde de pulsation voisine :

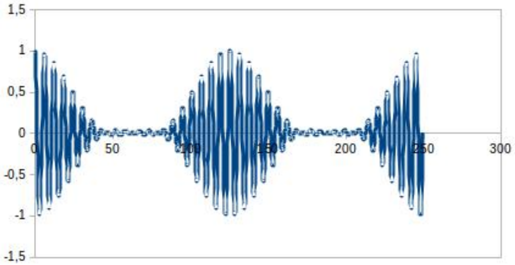


FIGURE – Paquet d'onde de 6 ondes de pulsations voisines.

La superposition de six Ondes Planes Progressives Harmoniques n'est plus monochromatique et se localise, i.e. des annulations (plus importantes) apparaisent dans la fonction d'onde.

Pour étudier un problème d'onde dont l'équation de propagation est linéaire à coefficient constant (sans absorpton), il faut procéder comme tel :

1. utiliser la décomposition de Fourier de l'excitation

$$\underline{\xi}(x=0,t) = \text{"}\sum_{\omega}\text{"}\, a(\omega)\exp(j\omega t) = \int_{\omega} \hat{a}(\omega)\exp(j\omega t) d\omega$$

2. étudier la propagation de chacune des composantes

$$\underline{\xi}(x,t) = \int_{\omega} \hat{a}(\omega)\exp(j\omega(t - \frac{x}{v_{\varphi(\omega)}}))d\omega = \int_{\omega} \hat{a}(\omega)\exp(j\omega t - jk'(\omega)x)d\omega$$

3. en déduire alors la déformation du signal

Propagation d'un paquet d'ondes.

Le signal réel (physique) est la superposition de toutes les composantes de Fourier, nommée paquet d'ondes.

$$\underline{\xi}(x,t) = \sum_{\omega} a(\omega)\exp(j\omega t - jk'(\omega)x) = \int \hat{a}(\omega)\exp(j\omega t - jk'(\omega)x)d\omega$$

Ce paquet d'onde possède une extension spatiale et temporelle finie, il est **localisé**.
Plus l'onde est monochromatique $\Delta\omega$ faible, plus son extension est grande.

Pour extraire de l'information sur la déformation du signal, on se limite au cas où toutes les ondes qui composent le paquet d'ondes ont une pulsation voisine d'une pulsation moyenne ω_0 et donc nous allons faire un Développement Limité au voisinage de ω_0 :

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0) = \omega_0 + \delta\omega$$

$$k'(\omega) = k'(\omega_0) + \frac{dk'}{d\omega}_{\omega_0}(\omega - \omega_0) = k'_0 + \frac{dk'}{d\omega}_{\omega_0}\delta\omega$$

On remplaçant dans les expressions, il vient :

$$\underline{\xi}(x,t) = \sum_{\omega} a(\omega)\exp(j(\omega_0+\delta\omega)t - j(k'_0 + \frac{dk'}{d\omega}_0\delta\omega)x) = \int \hat{a}(\omega)\exp(j(\omega_0+\delta\omega)t - j(k'_0 + \frac{dk'}{d\omega}_0\delta\omega)x)d\omega$$

Soit, en sortant de la somme les terme devenu indépendant de ω :

$$\underline{\xi}(x,t) = \exp(j\omega_0 t - jk'_0 x)\sum_{\omega} A(\omega)\exp(j\delta\omega t - j\frac{dk}{d\omega}_0\delta\omega x)$$

Vitesse de Groupe.

Le premier terme $\exp(j\omega_0 t - jk'_0 x)$ désigne la propagation de l'onde moyenne alors que $\sum_\omega a(\omega)\exp(j\delta\omega(t - \frac{dk'}{d\omega}_0)x)$ désigne la propagation de l'enveloppe du signal, dont la vitesse de propagation est la **vitesse de groupe** :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'}_{\omega_0}$$

La vitesse de phase diffère donc de la vitesse de groupe, ce qui fait que le paquet d'onde se déforme en se propageant. Tel est la caractéristique d'un phénomène dispersif.

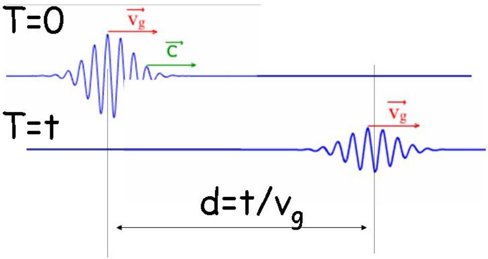
$$\underline{\xi}(x,t) = \exp(j\omega_0 t - jk'_0 x)\sum_{\omega} A(\omega)\exp(j\delta\omega t - j\frac{dk}{d\omega}\delta\omega x)$$

Vitesse de Groupe.

Le premier terme $\exp(j\omega_0 t - jk'_0 x)$ désigne la propagation de l'onde moyenne alors que $\sum_\omega A(\omega)\exp(j\delta\omega(t - \frac{dk'}{d\omega})x)$ désigne la propagation de l'enveloppe du signal, dont la vitesse de propagation est la **vitesse de groupe** :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'})_{\omega_0}$$

La vitesse de phase diffère donc de la vitesse de groupe, ce qui fait que le paquet d'onde se déforme en se propageant. Tel est la caractéristique d'un phénomène dispersif.



$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\alpha}{rd^2} j\omega$$
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - j\frac{\alpha c^2}{rd^2\omega}\right)$$

Etude haute fréquence (ou pour des frottements faibles).

DL_0
$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}$ Relation de dispersion de d'Alembert, sans atténuation ni dispersion.

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\alpha}{rd^2} j\omega$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - j\frac{\alpha c^2}{rd^2\omega})$$

Etude haute fréquence (ou pour des frottements faibles).

DL_0
$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}$ Relation de dispersion de d'Alembert, sans atténuation ni dispersion.

DL_1
$\underline{k} \simeq \frac{\omega}{c}(1 - j\frac{fc^2}{2rd^2\omega})$ Relation de dispersion.
$k' = \frac{\omega}{c}$ donc $v_\varphi = c$ milieu non dispersif.
$k'' = \frac{fc}{2rd^2} < 0$ milieu absorbant (toutes les ondes sont absorbées de la même manière.

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\alpha}{rd^2} j\omega$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - j\frac{\alpha c^2}{rd^2\omega})$$

Etude haute fréquence (ou pour des frottements faibles).

DL_0
$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}$ Relation de dispersion de d'Alembert, sans atténuation ni dispersion.

DL_1
$\underline{k} \simeq \frac{\omega}{c}(1 - j\frac{fc^2}{2rd^2\omega})$ Relation de dispersion.
$k' = \frac{\omega}{c}$ donc $v_\varphi = c$ milieu non dispersif.
$k'' = \frac{fc}{2rd^2} < 0$ milieu absorbant (toutes les ondes sont absorbées de la même manière.

DL_2
$\underline{k} = \frac{\omega}{c}(1 - j\frac{fc^2}{2rd^2\omega} - \frac{f^2c^4}{8r^2d^4\omega^2})$ Relation de dispersion.
$k' = \frac{\omega}{c}(1 - \frac{f^2c^4}{4r^2d^4\omega^2})$ donc v_φ dépend de la pulsation : milieu dispersif.
$k'' = \frac{fc}{2rd^2} < 0$ milieu absorbant (toutes les ondes sont absorbées de la même manière.

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\alpha}{rd^2} j\omega$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - j\frac{\alpha c^2}{rd^2\omega})$$

Etude haute fréquence (ou pour des frottements faibles).

DL_0
$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}$ Relation de dispersion de d'Alembert, sans atténuation ni dispersion.

DL_1
$\underline{k} \simeq \frac{\omega}{c}(1 - j\frac{fc^2}{2rd^2\omega})$ Relation de dispersion.
$k' = \frac{\omega}{c}$ donc $v_\varphi = c$ milieu non dispersif.
$k'' = \frac{fc}{2rd^2} < 0$ milieu absorbant (toutes les ondes sont absorbées de la même manière.

DL_2
$\underline{k} = \frac{\omega}{c}(1 - j\frac{fc^2}{2rd^2\omega} - \frac{f^2c^4}{8r^2d^4\omega^2})$ Relation de dispersion.
$k' = \frac{\omega}{c}(1 - \frac{f^2c^4}{4r^2d^4\omega^2})$ donc v_φ dépend de la pulsation : milieu dispersif.
$k'' = \frac{fc}{2rd^2} < 0$ milieu absorbant (toutes les ondes sont absorbées de la même manière.

Remarque : dispersion et absorption sont liées par le principe de causalité mais les deux phénomènes peuvent apparaître à des ordres différents, comme le montre l'exemple ci dessus.

L'équation de d'Alembert étudié au chapitre précédent est une équation qui invariante par retournement temporelle (i.e. par changement de $t \rightarrow t' = -t$, le terme de dérivée seconde ne change pas.).
L'équation traduit donc un phénomène réversible.
Il n'y a aucune perte dans les études du chapitre 1.

L'équation trouvée dans ce chapitre est une équation dont le coefficient $-\frac{\alpha}{rd^2}\frac{\partial \xi}{\partial t}$ n'est pas invariant par retournement temporelle, il deviendrait $+\frac{\alpha}{rd^2}\frac{\partial \xi}{\partial t'}$.
L'équation traduit donc un phénomène irréversible.
Les frottements sont responsables de cette irréversibilité.
Le retournement temporelle conduirait à une amplification au lieu d'une absorption, ce qui n'a pas de sens en l'absence d'énergie exterieure apportée.

1. Chaîne infinie d'atomes avec pertes énergétiques.

2. Recherche des solutions sous forme de pseudo OPPH.
   - Relation de dispersion
   - Absorption.
   - Dispersion, vitesse de phase et de groupe.

3. Retour sur la propagation du son dans un solide en présence de pertes.

4. Conclusion