

# Éléments de transformée de Fourier.

P. Ribière

Collège Stanislas

Année Scolaire 2016/2017

- 1 Représentation spectrale d'un signal.
- 2 Éléments théoriques sur le développement en série de Fourier.
- 3 Éléments théoriques sur la transformée de Fourier.

# Plan

- 1 Représentation spectrale d'un signal.
  - Signaux sinusoïdaux purs.
  - Signaux périodiques.
- 2 Éléments théoriques sur le développement en série de Fourier.
- 3 Éléments théoriques sur la transformée de Fourier.

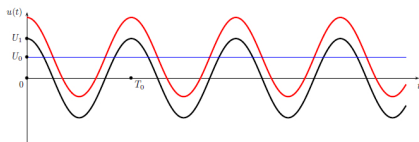


FIGURE – Représentation temporelle de signaux simples.

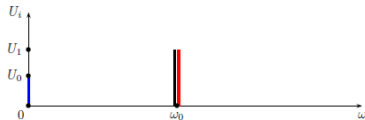


FIGURE – Représentation spectrale de signaux simples.

En noir, signal périodique de période  $T_0 = \frac{\omega_0}{2.\pi}$ , d'amplitude  $U_1$ , de valeur moyenne nulle :  
 $u(t) = U_1.\cos(\omega_0.t)$

En bleu, signal constant à la valeur  $U_0$  :  $u(t) = U_0$

En rouge, signal périodique de période  $T_0 = \frac{\omega_0}{2.\pi}$ , d'amplitude  $U_1$ , de valeur moyenne (Offset)  
 $U_0$  :  $u(t) = U_0 + U_1.\cos(\omega_0.t)$

# Plan

- 1 Représentation spectrale d'un signal.
  - Signaux sinusoidaux purs.
  - Signaux périodiques.
- 2 Éléments théoriques sur le développement en série de Fourier.
- 3 Éléments théoriques sur la transformée de Fourier.

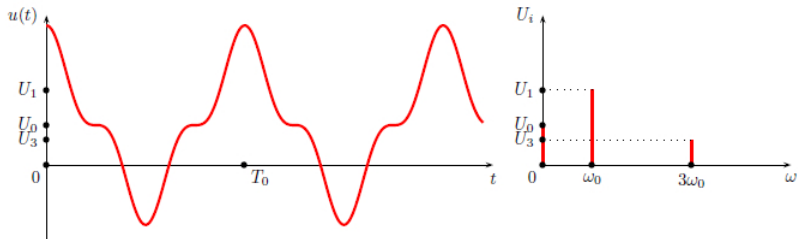


FIGURE – Représentation temporelle et spectrale d'un signal complexe.

Développement en série de Fourier du signal :

$$u(t) = U_0 + U_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + U_3 \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t)$$

Etude du signal créneau de période  $T_0$ , de valeur moyenne nulle variant en 1 et -1 :  
 (Par décalage de l'origine, il est possible de se placer dans le cas d'un signal créneau paire.)

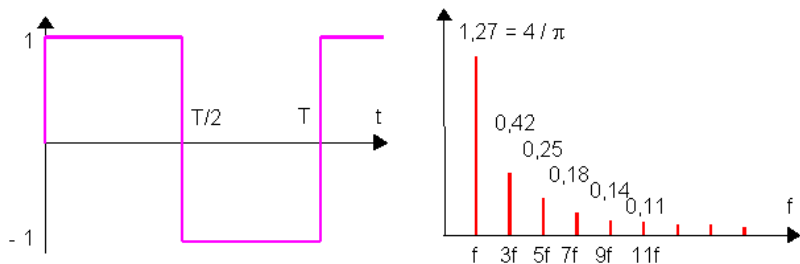


FIGURE – Représentation temporelle et spectrale d'un signal créneau.

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 \cdot t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0 \cdot t) + \frac{1}{7} \cos(7\omega_0 \cdot t) + \dots \right]$$

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{2k+1} \cos((2k+1)\omega_0 \cdot t)$$

Etude du signal créneau de période  $T_0$ , de valeur moyenne nulle variant en 1 et -1 :  
 (Par décalage de l'origine, il est possible de se placer dans le cas d'un signal créneau paire.)

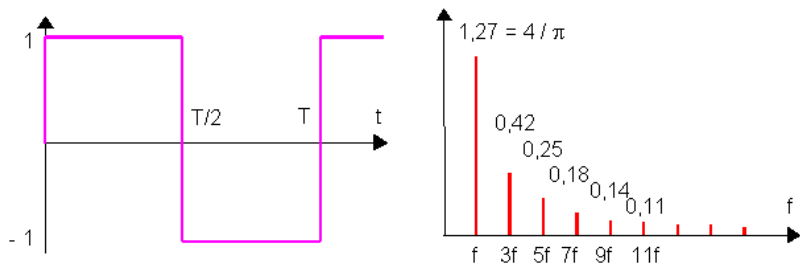


FIGURE – Représentation temporelle et spectrale d'un signal créneau.

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \cos(\omega_0.t) + \frac{1}{3} \cos(3\omega_0.t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0.t) + \frac{1}{7} \cos(7\omega_0.t) + \dots \right]$$

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{2k+1} \cos((2k+1)\omega_0.t)$$

## Spectre de Fourier du signal créneau.

Le spectre de Fourier d'un signal créneau est "riche" : l'amplitude (ou poids) de l'harmonique  $n$  décroît lentement, en  $\frac{1}{n}$



Etude du signal créneau de période  $T_0$ , de valeur moyenne nulle variant en 1 et -1 :  
 (Par décalage de l'origine, il est possible de se placer dans le cas d'un signal créneau pair.)

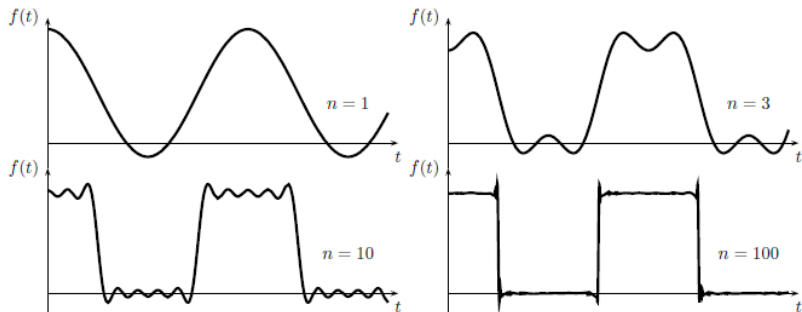


FIGURE – Représentation temporelle d'un signal créneau selon le nombre de terme de la série de Fourier.

Etude du signal créneau de période  $T_0$ , de valeur moyenne nulle variant en 1 et -1 :  
 (Par décalage de l'origine, il est possible de se placer dans le cas d'un signal créneau pair.)

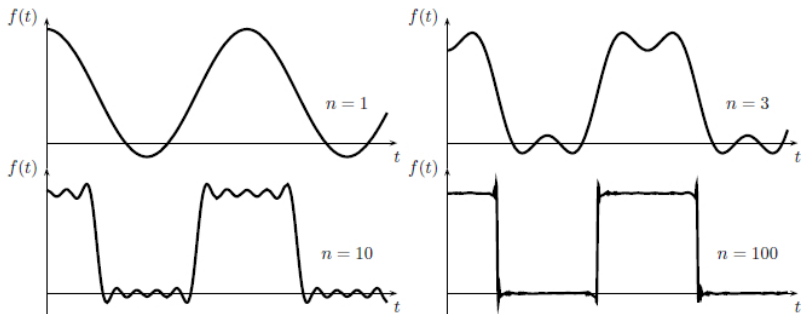


FIGURE – Représentation temporelle d'un signal créneau selon le nombre de terme de la série de Fourier.

## Spectre de Fourier du signal créneau.

Le spectre de Fourier d'un signal créneau est "riche" : l'amplitude (ou poids) de l'harmonique  $n$  décroît lentement, en  $\frac{1}{n}$

Etude du signal créneau de période  $T_0$ , de valeur moyenne nulle variant en 1 et -1 :  
 (Par décalage de l'origine, il est possible de se placer dans le cas d'un signal créneau pair.)

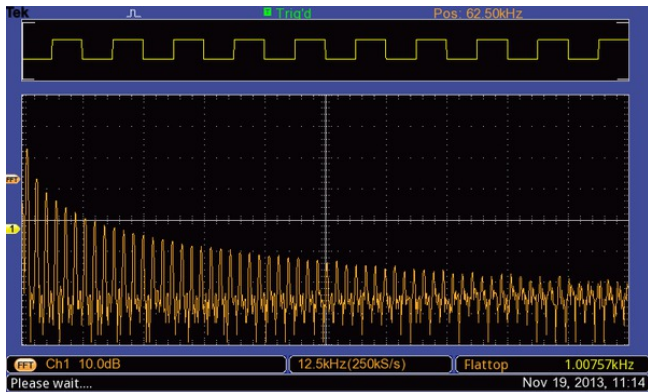


FIGURE – Représentation temporelle d'un signal créneau selon le nombre de terme de la série de Fourier.

## Spectre de Fourier du signal créneau.

Le spectre de Fourier d'un signal créneau est "riche" : l'amplitude (ou poids) de l'harmonique  $n$  décroît lentement, en  $\frac{1}{n}$

Etude du signal triangulaire de période  $T_0$ , de valeur moyenne nulle variant en 1 et -1 :  
 (Par décalage de l'origine, il est possible de se placer dans le cas d'un signal créneau paire.)

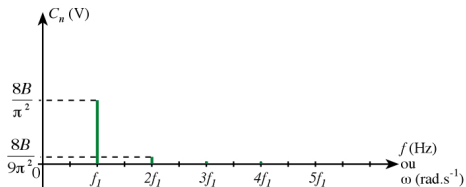


FIGURE – Représentation spectrale d'un signal triangulaire.

$$u(t) = \frac{8}{\pi^2} \left[ \sin(\omega_0.t) + \frac{1}{9} \sin(3\omega_0.t) + \frac{1}{25} \sin(5\omega_0.t) + \frac{1}{49} \sin(7\omega_0.t) + \dots \right]$$

$$u(t) = \frac{8}{\pi^2} \left[ \cos(\omega_0.t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega_0.t) + \frac{1}{25} \cos(5\omega_0.t) + \frac{1}{49} \cos(7\omega_0.t) + \dots \right]$$

$$u(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega_0.t)$$

Etude du signal triangulaire de période  $T_0$ , de valeur moyenne nulle variant en 1 et -1 :  
 (Par décalage de l'origine, il est possible de se placer dans le cas d'un signal créneau paire.)

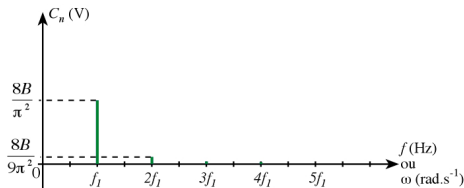


FIGURE – Représentation spectrale d'un signal triangulaire.

$$u(t) = \frac{8}{\pi^2} \left[ \sin(\omega_0.t) + \frac{1}{9} \sin(3\omega_0.t) + \frac{1}{25} \sin(5\omega_0.t) + \frac{1}{49} \sin(7\omega_0.t) + \dots \right]$$

$$u(t) = \frac{8}{\pi^2} \left[ \cos(\omega_0.t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega_0.t) + \frac{1}{25} \cos(5\omega_0.t) + \frac{1}{49} \cos(7\omega_0.t) + \dots \right]$$

$$u(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega_0.t)$$

## Spectre de Fourier du signal triangle.

Le spectre de Fourier d'un signal triangle est "pauvre" : l'amplitude (ou poids) de l'harmonique  $n$  décroît rapidement, en  $\frac{1}{n^2}$

# Plan

- 1 Représentation spectrale d'un signal.
- 2 **Éléments théoriques sur le développement en série de Fourier.**
  - Calcul de coefficients de Fourier.
    - Fonctions usuelles.
    - Aspect énergétique.
    - Exemple d'application : le filtrage.
- 3 Éléments théoriques sur la transformée de Fourier.

Tout signal périodique  $e(t)$ , de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  peut se décomposer de manière univoque en série de Fourier :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n.\omega.t) + b_n \sin(n.\omega.t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T e(t') dt'$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T e(t') \cdot \cos(n\omega t') dt'$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T e(t') \cdot \sin(n\omega t') dt'$$

L'harmonique (ou le poids) de l'harmonique  $n.\omega_0$  est  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ .

L'harmonique  $n = 1$  est appelée en physique terme fondamental ou harmonique de rang 1 (musique).

L'harmonique  $n = 2$  (ou  $n = 3$  si  $c_2 = 0$ ) est en physique appelée première harmonique ou harmonique de rang  $n$ .

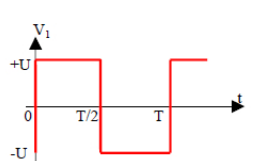
Si  $e(t)$  est paire, alors sa série de Fourier ne présente que des termes pairs, i.e.  $b_n = 0$  pour  $n \geq 1$ . (Situation que nous privilégierons par choix de l'origine des temps.)

Si  $e(t)$  est impaire, alors sa série de Fourier ne présente que des termes impairs, i.e.  $a_n = 0$  pour  $n \geq 1$ .

# Plan

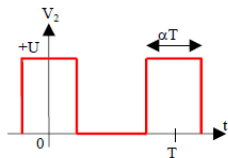
- 1 Représentation spectrale d'un signal.
- 2 **Éléments théoriques sur le développement en série de Fourier.**
  - Calcul de coefficients de Fourier.
  - **Fonctions usuelles.**
  - Aspect énergétique.
  - Exemple d'application : le filtrage.
- 3 Éléments théoriques sur la transformée de Fourier.



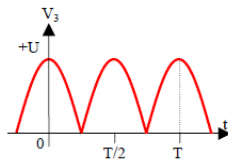


$$V_1(t) = \frac{4U}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \sin((2n+1)\omega t)$$

$$V_1(t) = \frac{4U}{\pi} \cdot \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

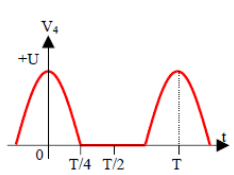


$$V_2(t) = \alpha U + \frac{2U}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(n\alpha\pi) \cos(n\omega t)$$

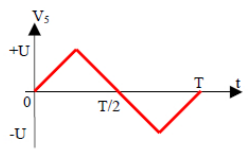


$$V_3(t) = \frac{2U}{\pi} - \frac{4U}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \cos(2n\omega t)$$

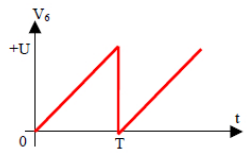
FIGURE – Développement en Série de Fourier de fonctions usuelles.



$$V_4(t) = \frac{U}{\pi} + \frac{U}{2} \cos(\omega t) + \frac{2U}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)} \cos(2n\omega t)$$



$$V_5(t) = \frac{8U}{\pi^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin((2n+1)\omega t)$$



$$V_6(t) = \frac{U}{2} - \frac{U}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega t)$$

FIGURE – Développement en Série de Fourier de fonctions usuelles.

# Plan

- 1 Représentation spectrale d'un signal.
- 2 **Éléments théoriques sur le développement en série de Fourier.**
  - Calcul de coefficients de Fourier.
  - Fonctions usuelles.
  - **Aspect énergétique.**
  - Exemple d'application : le filtrage.
- 3 Éléments théoriques sur la transformée de Fourier.

Théorème de Parseval :

$$e_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T e^2(t') dt' = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

### Spectre de Fourier et analyse énergétique.

La puissance moyenne d'un signal est la somme des puissances de chacune de ses harmoniques.

Les différentes composantes de Fourier, de fréquences différentes, n'interfèrent pas entre elles et peuvent donc être étudiées indépendamment les unes des autres.

# Plan

- 1 Représentation spectrale d'un signal.
- 2 Éléments théoriques sur le développement en série de Fourier.**
  - Calcul de coefficients de Fourier.
  - Fonctions usuelles.
  - Aspect énergétique.
  - Exemple d'application : le filtrage.
- 3 Éléments théoriques sur la transformée de Fourier.

On s'intéresse à un filtre passe bas du premier ordre, de gain statique 10 et de fréquence de coupure  $f_c = 1kHz$ .

- ① Dessiner le diagramme de Bode de ce filtre.
- ② Prévoir la forme du signal de sortie
  - ① pour un signal d'entrée créneau symétrique  $\pm 1V$  de période  $T = 20ms$ .
  - ② pour un signal d'entrée triangle symétrique  $\pm 1V$  de période  $T = 20ms$ .
  - ③ pour un signal d'entrée créneau symétrique  $\pm 1V$  de période  $T = 20\mu s$ .
  - ④ pour un signal d'entrée triangle symétrique  $\pm 1V$  de période  $T = 20\mu s$ .
  - ⑤ pour un signal d'entrée  $e(t) = 3.\sin^3(2\pi f_e.t)$  avec  $f_e = 500Hz$
  - ⑥ pour un signal d'entrée  $e(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n.\omega.t)$

# Plan

- 1 Représentation spectrale d'un signal.
- 2 Éléments théoriques sur le développement en série de Fourier.
- 3 **Éléments théoriques sur la transformée de Fourier.**
  - Éléments théoriques sur la transformée de Fourier.

Il est possible de généraliser l'idée de Fourier à des fonctions (et même des distributions comme celle de Dirac) non périodique (sous certaines conditions).

La somme discrète est alors remplacé par une sommation continue, i.e. une intégrale.

$$e(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{a}(\omega) \cdot \exp(j\omega t) d\omega$$

L'amplitude  $\widehat{a}(\omega)$  se calcule par TF inverse :

$$\widehat{a}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e(t') \cdot \exp(-j\omega t') dt'$$

Il existe une relation entre l'extension temporelle de la fonction  $\Delta t$  et l'extension spectrale  $\Delta \omega$  de la fonction :

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \simeq 1$$

Cette notion sera réexploitée en physique des ondes avec la notion de "paquet d'ondes". Mais dès lors, on constate que pour un signal monochromatique (une seule harmonique), l'extension temporelle est infinie.

Une raie spectrale présente toujours une certaine largeur spectrale  $\Delta \omega$  et donc la lumière est émise par "paquet d'ondes" d'une durée

$$\Delta t \simeq \frac{1}{\Delta \omega}$$