

# Exercices de thermodynamique

★ ★ ★

PC

Philippe Ribière

Année Scolaire 2013-2014



# Chapitre 1

## Thermodynamique.

### 1.1 Etude de diverses transformations.

*Objectifs :*

1. *A partir des données de l'énoncé, savoir identifier l'une des 5 transformations modèles de la thermodynamique.*
2. *Savoir réaliser une bilan énergétique sur chacune des 5 transformations modèles.*
3. *Commenter le signe des échanges énergétiques.*
4. *Savoir réaliser une bilan d'entropie sur chacune des 5 transformations modèles.*
5. *Commenter la réversibilité de la transformation.*

On s'intéresse à un système constitué du piston de capacité calorifique négligeable, de masse négligeable, et de l'air, contenu dans le piston, assimilé à un gaz parfait diatomique. Dans l'état initial, l'air est à la température de  $T_0 = 300K$ , occupe un volume de  $V_0 = 10L$  et est à la pression  $P_0 = 1bar$ .

Les questions de cet exercice sont indépendantes et dans chacune, l'état initial est l'état décrit ci dessus.

1. Le piston est supposé aux parois diathermes et possède une paroi mobile de masse négligeable, il est placé dans un milieu extérieur, assimilé à un thermostat à la température  $T_e=600K$  et à la pression  $P_e = 1bar$  invariante. Déterminer  $p_1$   $T_1$  et  $V_1$  à l'état final. Calculer le travail  $W_{0 \rightarrow 1}$  et  $Q_{0 \rightarrow 1}$ . Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.
2. Le piston est supposé aux parois diathermes et est indéformable, il est placé dans un milieu extérieur, assimilé à un thermostat à la température  $T_e=600K$  et à la pression  $P_e = 1bar$  invariante. Déterminer  $p_2$   $T_2$  et  $V_2$  à l'état final. Calculer le travail  $W_{0 \rightarrow 2}$  et  $Q_{0 \rightarrow 2}$ . Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.
3. Le piston est supposé aux parois diathermes et possède une paroi mobile, un opérateur déplace très lentement cette paroi mobile de telle manière à ce que le volume ait été divisé par 2, il est placé dans un milieu extérieur, assimilé à un thermostat à la température  $T_e=300K$ . Déterminer  $p_3$   $T_3$  et  $V_3$  à l'état final. Calculer le travail  $W_{0 \rightarrow 3}$  et  $Q_{0 \rightarrow 3}$ . Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.

4. Le piston est supposé aux parois athermales et possède une paroi mobile, un opérateur déplace très lentement cette paroi mobile de telle manière à ce que le volume ait été divisé par 2, il est placé dans un milieu extérieur, assimilé à un thermostat à la température  $T_e=300K$ . Déterminer  $p_4$ ,  $T_4$  et  $V_4$  à l'état final. Calculer le travail  $W_{0 \rightarrow 4}$  et  $Q_{0 \rightarrow 4}$ . Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.
5. Le piston est supposé calorifugé et possède une paroi mobile, un opérateur déplace brutalement lentement cette paroi mobile de telle manière à ce que le volume ait été divisé par 2. Déterminer  $p_5$ ,  $T_5$  et  $V_5$  à l'état final. Calculer le travail  $W_{0 \rightarrow 5}$  et  $Q_{0 \rightarrow 5}$ . Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.
6. Le piston est supposé calorifugé et est indéformable, il est placé dans un milieu extérieur, assimilé à un thermostat à la température  $T_e=600K$  et à la pression  $P_e = 1bar$  invariante. Déterminer  $p_6$ ,  $T_6$  et  $V_6$  à l'état final. Calculer le travail  $W_{0 \rightarrow 6}$  et  $Q_{0 \rightarrow 6}$ . Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.

*Commentaires :*

1. *La lecture de l'énoncé est primordiale en thermodynamique : il faut savoir identifier d'une part la nature du système (GPM ou GPD ou liquide ou solide) et d'autre part les caractéristiques des parois du système et de la transformation.*
2. *Il faut être conscient qu'une transformation isotherme nécessite un échange de chaleur et qu'au contraire une transformation adiabatique conduit nécessairement à une évolution de température.*
3. *La transformation monobare est toujours un peu plus difficile à calculer car il faut résoudre un système de deux équations à deux inconnues.*
4. *Le second principe permet de déterminer par le calcul de l'entropie créée si la transformation est possible et réversible ( $S_C = 0$ ), possible et irréversible ( $S_C > 0$ ) ou impossible ( $S_C < 0$ ) mais cela peut aussi se commenter après calcul.*

## 1.2 Comparaison de deux cycles thermodynamiques.

Dans tout l'exercice, on s'intéresse à un piston verticale de section mobile  $S = 0,01m^2$ , de masse négligeable, au contact de l'atmosphère  $p_0 = 10^5 Pa$ , contenant une mole de gaz parfait à la température initiale  $T_0 = 273K$  et tel que sa capacité calorifique à volume constant est  $C_V = \frac{5R}{2}$ . On considère aussi une masse  $M = 102kg$  et le champ de pesanteur est  $g = 9,81m.s^{-2}$ .

Premier cycle :

1. Dans un premier temps, on suppose le piston calorifugé et l'on pose très progressivement la masse  $M$  sur la partie mobile du piston. Caractériser la transformation. Etudier l'état d'équilibre (1) ainsi obtenu ( $T_1$ ,  $P_1$ ,  $V_1$ ). Calculer  $W_1$  et  $Q_1$ . Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.
2. Partant de l'état (1), on supprime les éléments qui calorifugeaient le système, caractériser la transformation. Etudier l'état d'équilibre (2) ainsi obtenu ( $T_2$ ,  $P_2$ ,  $V_2$ ). Calculer  $W_2$  et  $Q_2$ . Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.

3. Un opérateur retire alors très lentement la masse  $M$  du dessus du piston. Montrer que l'état final est identique à l'état initial avant toute transformation. Calculer  $W_3$  et  $Q_3$ . Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.
4. *star* Dessiner sur un diagramme de Clapeyron les évolutions du gaz. Commenter.
5. Calculer  $\Delta U_{tot}$ ,  $Q_{tot}$  et  $W_{tot}$ ,  $\Delta S_{tot}$ ,  $S_{echange\ tot}$ ,  $S_{creee\ tot}$  sur le cycle.

Second cycle :

6. Dans un deuxième temps, partant de l'état initial (0) on suppose toujours le piston calorifugé mais l'on dépose cette fois sans précaution (brutalement) la masse  $M$  sur le piston, Caractériser la transformation. Etudier l'état d'équilibre (1') ainsi obtenu ( $T'_1$ ,  $P'_1$ ,  $V'_1$ ). Calculer  $W'_1$  et  $Q'_1$ . Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.
7. Partant de l'état (1'), on supprime les éléments qui calorifugeaient le système, caractériser la transformation. Etudier l'état d'équilibre (2) ainsi obtenu ( $T'_2$ ,  $P'_2$ ,  $V'_2$ ). Calculer  $W'_2$  et  $Q'_2$ . Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.
8. Un opérateur retire alors très lentement la masse  $M$  du dessus du piston. Montrer que l'état final est identique à l'état initial avant toute transformation. Calculer  $W_3$  et  $Q_3$ . Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.
9. Calculer  $\Delta U'_{tot}$ ,  $Q'_{tot}$  et  $W'_{tot}$ ,  $\Delta S'_{tot}$ ,  $S'_{echange\ tot}$ ,  $S'_{creee\ tot}$  sur le cycle.

Comparaison des deux cycles :

10. Comparer  $\Delta U_{0 \rightarrow 2}$  et  $\Delta U_{0 \rightarrow 2'}$ ,  $\Delta U_{tot}$  et  $\Delta U'_{tot}$ ,  $Q_{0 \rightarrow 2}$  et  $Q'_{0 \rightarrow 2'}$ ,  $Q_{tot}$  et  $Q'_{tot}$ ,  $W_{0 \rightarrow 2}$  et  $W'_{0 \rightarrow 2'}$ ,  $W_{tot}$  et  $W'_{tot}$ ,  $\Delta S_{tot}$  et  $\Delta S'_{tot}$ ,  $S_{echange\ tot}$  et  $S'_{echange\ tot}$ ,  $S_{creee\ tot}$  et  $S'_{creee\ tot}$ . Commenter.

*Commentaire : Un exercice typique de la thermodynamique avec deux chemins thermodynamiques différent à comparer. Sans difficulté majeure, il convient d'être rigoureux dans les applications numériques. La dernière partie permet une bonne réflexion sur les grandeurs qui dépendent ou ne dépendent pas du chemin suivi. Il s'agit en effet du premier exercice sur les cycles thermodynamique : lors d'un cycle, le système après une succession de transformations revient à son état de départ.*

### 1.3 Suite de transformation.

L'air ( $\gamma = 1,41$ , constante des gaz parfait  $R = 8,32 J.K^{-1}$ ) est comprimé de façon isotherme de la pression  $p_0 = 1 atm$  (état A) à la pression  $p_1 = 20 atm$  (état B) à la température  $T_0 = 273 K$ . Le gaz est ensuite détendu adiabatiquement de façon réversible jusqu'à la pression  $p_0 = 1 atm$  (état C).

1. Donner l'unité de  $R$  dans le système international.
2. Calculer la température finale  $T_1$  après cette double opération  $A \rightarrow B \rightarrow C$ .
3. On recommence la succession des deux opérations précédentes partant du gaz à la température  $T_1$ . Calculer la température  $T_2$ .

4. Trouver la formule générale de la température  $T_n$  du gaz, atteinte à la fin de la doubles opérations successives décrites précédemment.
5. Déterminer la variation d'énergie interne d'une mole de gaz, au cours de la  $n^{ieme}$  double transformation en fonction de  $\gamma$ ,  $T_0$ ,  $p_0$ ,  $p_1$  et  $n$ , ainsi que le travail et la chaleur échangés avec le milieu extérieur.

*Commentaire : D'après oral. Un exercice facile de thermodynamique. Il faut bien étudier séparément les deux transformations.*

## 1.4 Mesurer une capacité calorifique.

Considérons un calorimètre (un récipient calorifugé). Il contient  $m_1 = 1\text{kg}$  l'eau liquide de capacité calorifique  $c = 4,18\text{J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$  à la température  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ . On y ajoute une masse  $m_2 = 500\text{g}$  d'eau à  $T_2 = 70^\circ\text{C}$ .

1. Calculer la température finale.
2. En réalité, la température finale obtenue est de  $5^\circ$  inférieure à celle attendue. Calculer la capacité calorifique du calorimètre.
3. Dans le liquide est alors plongé une résistance  $R = 1\text{k}\Omega$ . Cette résistance est parcourue par un courant  $i = 100\text{mA}$  pendant  $10\text{mn}$ . Quelle est la température finale atteinte, en supposant le calorimètre parfait (question a), puis en tenant compte de sa capacité calorifique (question b).

*Commentaire : D'après Oral. Un exercice classique qui reprend tous les éléments vu en TP de calorimétrie.*

## 1.5 Cycle thermodynamique.

Un piston, dont la partie mobile est de masse négligeable, de section  $S = 0,1\text{m}^2$ , contient initialement un gaz parfait monoatomique en équilibre au contact de l'atmosphère, à la température  $T_0 = 290\text{K}$  et  $P_0 = 1\text{bar}$ . Le piston est par la suite calorifugé.

1. Un opérateur extérieur réalise une transformation très lente pour amener la pression à  $P_1 = 2\text{bar}$ . Déterminer complètement l'état d'équilibre 1 ainsi que les échanges énergétiques lors de cette première transformation. Que dire du bilan d'entropie ?
2. L'opérateur, tout en maintenant la pression extérieure à  $2\text{bar}$ , supprime les éléments qui calorugeaient le piston. Déterminer complètement l'état d'équilibre 2 ainsi que les échanges énergétiques lors de cette seconde transformation. La transformation est-elle réversible ?
3. L'opérateur modifie alors très très lentement le volume pour le ramener à sa valeur initiale  $V_0$ . Déterminer complètement l'état d'équilibre 3 ainsi que les échanges énergétiques lors de cette première transformation. La transformation est-elle réversible ?
4. Représenter ces trois transformations sur un diagramme de Clapeyron. Calculer le travail total et la chaleur totale échangée. Calculer l'entropie totale échangée.

*Commentaire : D'après écrit. Un exercice classique de la thermodynamique, complet avec bilan d'énergie et bilan d'entropie. Il faut être en mesure de faire cet exercice avec ces applications numériques rapidement (et sans se tromper) .*

## 1.6 Gaz dans un piston de masse non négligeable.

Un cylindre C de section  $S=10 \text{ cm}^2$  contient de l'air sec, à la température  $T = 7^\circ\text{C}$ . Il est fermé par un piston mobile, sans frottement, de masse  $M = 5 \text{ kg}$ , au contact de l'atmosphère à la pression  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ . L'air occupe une hauteur  $h = 35 \text{ cm}$ . On place sur le piston une surcharge  $m = 0,3 \text{ kg}$ . ( $\gamma = 1,4$ ,  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ )

1. Calculer la pression avant que la surcharge ne soit posée sur le piston.
2. Calculer le déplacement immédiat du piston.
3. Calculer la variation de température de l'air.
4. Déterminer la position finale du piston lorsque l'équilibre thermique avec l'extérieur est rétabli.

*Commentaire : Un exercice riche : d'une part, le piston n'est pas de masse négligeable, il faut donc définir avec soin la pression extérieure ; d'autre part, comme le premier état d'équilibre est obtenue par une transformation "rapide" : cela signifie que les échanges de chaleur qui sont lents n'ont pas le temps de se faire et que donc on peut supposer la transformation adiabatique même si le piston n'est pas calorifugé (il y a donc une évolution de la température comme le suggère la question 3 suite à cette première transformation) .*

## 1.7 Réversibilité et retour à l'état d'équilibre.

Dans tout ce qui suit, on étudie différentes transformations d'un gaz parfait diatomique. On notera  $R$  la constante des gaz parfaits  $R = 8,32 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

1. Compression isochore AB par contact thermique.  
On enferme le gaz dans une enceinte diathermane, indéformable, de capacité calorifique négligeable. L'état initial du gaz est A : ( $P_1 = 10^4 \text{ Pa}$ ,  $V_1 = 20 \text{ l}$ ,  $T_1 = 300 \text{ K}$ ).  
L'enceinte et donc le gaz est au contact thermique avec le milieu extérieur de température constante égale à  $T_2 = 600 \text{ K}$ , milieu constituant une source de chaleur de température constante ou thermostat.
  - a. Calculer l'état final B ( $P_2$ ,  $V_2$ ,  $T_2$ ) ainsi que  $W_{1\rightarrow 2}$  et  $Q_{1\rightarrow 2}$
  - b. Faire un bilan d'entropie. Conclure.
2. Détente isotherme BC à la température  $T_2$ .  
On enferme le gaz dans une enceinte diathermane dont une paroi horizontale de masse négligeable est mobile verticalement, sans frottement notable. L'espace au dessus de la paroi mobile est vide. La température du milieu extérieur est  $T_2 = 600 \text{ K}$  et un dispositif permet de déplacer lentement la paroi. Initialement, la paroi est bloquée. Elle impose le volume  $V_2$  dans l'état B.  
On débloque la paroi et on la déplace lentement jusqu'à une position pour laquelle l'état du

gaz est C ( $P_3, V_3, T_3$ ) tel que  $V_3 = 2.V_2$  et on la bloque à nouveau.

- a. Calculer l'état final C ( $P_3, V_3, T_3$ ) ainsi que  $W_{2 \rightarrow 3}$  et  $Q_{2 \rightarrow 3}$
  - b. Faire un bilan d'entropie. Conclure.
3. Compression isobare CA. On enferme le gaz dans une enceinte diathermane dont une paroi horizontale de masse négligeable est mobile verticalement, sans frottement notable. L'espace au dessus de la paroi mobile est vide. La pression est assurée dès lors par un corps de masse  $m = 100kg$  placé sur la paroi mobile horizontale mobile dont la surface est  $S = 0,1m^2$ . ( $g=10m.s^{-2}$ ). La température ambiante est constante et égale à  $T_1 = 300K$ . Initialement, la paroi impose au gaz le volume  $V_3$  dans l'état C ( $P_3, V_3, T_3$ ) état défini dans le 3. On débloque la paroi qui se déplace lentement et atteint une position d'équilibre, du fait du refroidissement du gaz dont la température passe de  $T_3 = 600K$  à  $T_1 = 300K$ .
- a. Montrer que l'état final est alors l'état A. Calculer  $W_{3 \rightarrow 1}$  et  $Q_{3 \rightarrow 1}$
  - b. Faire un bilan d'entropie. Conclure.
4. Représenter les diverses transformations sur un diagramme de Clapeyron. Calculer  $W_{tot}, Q_{tot}$ , calculer le rendement du moteur (en justifiant qu'il s'agit bien d'un moteur). Ce moteur est il réversible ?

*Commentaire : Encore un exercice classique de la thermodynamique, facile dans la mesure où la nature de la transformation est précisée et n'est donc pas à interpréter par la lecture de l'énoncé.*

## 1.8 Cycle de Carnot.

Le cycle de Carnot se compose de quatre transformations :

Deux évolution isothermes réversibles AB et CD, au contact des sources froides à  $20^\circ C$  ( $T_1 = 293^\circ K$ ) et chaudes à  $600^\circ C$  ( $T_2 = 873^\circ K$ ). Deux évolutions adiabatiques réversible BC et DA une compression et une détente.

On suppose aussi que le fluide est invariant (la transformation chimique n'affecte pas ces propriétés) et bien décrit par un gaz parfait avec  $\gamma = 1,4$ . On prendra  $R = 8,31$  S.I.

1. Représenter le cycle moteur sur le diagramme de Clapeyron.
2. Calculer le rendement de ce moteur de Carnot.
3. Sachant que l'air est initialement à la température  $T_A = T_1$ , à la pression  $P_A = 1000hPa$ , et que le volume du piston est  $V_A = 1000cm^3$ , et que dans l'état C, la température est  $T_C = T_2$  (pour avoir une évolution isotherme réversible) et  $P_C = 60000hPa$  calculer les caractéristiques de chaque état, ainsi que le travail et la chaleur lors de chaque transformation. (Vérifier la cohérence de vos résultats.)
4. Pourquoi le cycle de Carnot n'est il pas utilisé dans les moteurs ?
5. Comment fabriquer un réfrigérateur de Carnot ? Dessiner son cycle sur le diagramme de Clapeyron.

Réponse:  $n = 0,041mol$  2.  $\eta = 0,66$  3.  $T_B = 293K$ ,  $V_B = 765cm^3$  et  $P_B = 1,3bar$  (à partir de l'état C)  $W_{A \rightarrow B} = -Q_{A \rightarrow B} = 26J$   $V_C = 50cm^3$   $W_{B \rightarrow C} = 494J$   $V_D = 54,7cm^3$  et  $P_D =$

54,5bar (à partir de A)  $W_{C \rightarrow D} = -Q_{C \rightarrow D} = -864J$   $W_{D \rightarrow A} = -59,5J$   $W_{tot} = -Q_{tot} = -838J$   
*Commentaire : Cet exercice de concours est très classique. Les cycles des machines thermiques sont composés des 5 transformations modèles. Chaque transformation doit être étudiée séparément et les informations doivent ensuite être regroupées. Vous devez aussi connaître les limites du cycle de Carnot.*

## 1.9 Cycle d'Otto.

Un moteur à explosion fonctionne sur le cycle d'Otto, ou Beau de Rochas modélisé ici par :

- Admission d'un volume  $V_1$  du mélange air-essence, à  $P_1 = P_0$  et  $T_1 = 350 K$ .
- Compression isentropique (adiabatique réversible) jusqu'à l'état  $(P_2, T_2, V_2)$ .
- Explosion (et donc compression) du mélange qui se retrouve dans l'état  $(P'_2, T'_2, V'_2 = V_2)$ .
- Détente isentropique jusqu'à l'état  $(P_3, T_3, V_3 = V_1)$ .
- Ouverture de la soupape d'échappement, le mélange revient à l'état 1 avant d'être rejeté dans l'atmosphère. Le gaz subit d'abord une détente isochore avant d'être relâché dans l'atmosphère.

On suppose aussi que le fluide est invariant (la transformation chimique n'affecte pas ces propriétés) et bien décrit par un gaz parfait avec  $\gamma = 1,35$ .

Données :

$$V_2 - V_1 = 1124 \text{ cm}^3$$

$$\alpha = \frac{V_1}{V_2} = 9,4$$

masse volumique de l'essence  $\mu = 720 \text{ kg.m}^{-3}$ .

pouvoir thermique de l'essence  $K = 48 \text{ kJ.g}^{-1}$ .

consommation au 100 km  $c = 5,9 \text{ L}$  à  $V = 120 \text{ km.h}^{-1}$  ( $N_{tours} = 5600 \text{ tr/mn}$ ).

1. Tracer le cycle sur un diagramme de Clapeyron. Faire un premier bilan sur chacune des transformations.
2. Pourquoi parle-t-on de moteur quatre temps ? Quel est l'intérêt d'avoir 8 cylindres ?
3. Calculer le rendement du moteur  $\eta$  en fonction de  $T_1, T_2, T'_2$  et  $T_3$ , puis en fonction de  $\alpha$  et  $\gamma$ .
4. Montrer la puissance du moteur  $P$  s'écrit en fonction de  $c, V, K, \mu, \eta$   $P = 10^{-5}/3600.c.V.\mu.K.\eta$ .
5. Calculer toutes les températures et les pressions en étudiant chacune des transformations.
6. Calculer le rendement du moteur, le rendement de Carnot, commenter.
7. Commenter le modèle adopté pour la transformation.

Réponse:  $V_1 = 1258 \text{ cm}^3$  3.  $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_3}{T'_2 - T_2} = 1 - \alpha^{1-\gamma} = 0,54$  4.  $P = 37 \text{ kW}$  5.  $T_2 = T_1 \alpha^{\gamma-1} = 767 \text{ K}$   $P_2 = P_1 \alpha^\gamma = 20,6 \text{ bar}$   $P'_2 = 58,7 \text{ bar}$   $T_3 = 977 \text{ K}$  et  $P_3 = 2,85 \text{ bar}$ . 6.  $\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0,84$   
*Commentaire : Cet exercice, extrait de concours, propose l'étude du cycle du moteur essence. Sans connaître le cycle, vous devez être en mesure d'identifier les quatre temps du moteur, qui n'ont pas de lien direct avec les quatre transformations thermodynamiques et aussi connaître la différence entre le moteur essence et le moteur diesel.*

## 1.10 Climatiseur.

On souhaite réaliser la climatisation d'un local afin de maintenir sa température à la valeur  $T_1=300\text{K}$  alors que l'extérieur est à la température de  $T_2 = 315\text{K}$ . On utilise pour cela une machine thermique, fonctionnant avec  $n$  mole d'un GP de capacité calorifique molaire à pression constant  $C_{pm} = 30\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .

Au cours de la transformation, le fluide reçoit les transferts énergétiques suivants :  $Q_1$  de la source froide,  $Q_2$  de la source chaude et  $W$  un travail mécanique.

1. Préciser le signe de chacun des transferts énergétiques.
2. Supposons que le climatiseur fonctionne sur un cycle de Carnot. Représenter le cycle de Carnot sur le diagramme de Watt  $P=f(V)$ . Calculer l'efficacité de la climatisation.
3. Dans la réalité, le fluide décrit le cycle suivant :
  - A à B, compression adiabatique réversible de  $T_1$  à  $T'_1 = 350\text{K}$
  - B à C, refroidissement isobare de  $T'_1$  à  $T_2$
  - C à D, détente adiabatique réversible de  $T_2$  à  $T'_2$
  - D à A, échauffement isobare de  $T'_2$  à  $T_1$
  - (a) Représenter le cycle sur le diagramme de Watt  $P=f(V)$ .
  - (b) Exprimer les variations d'entropie du fluide sur chaque transformation en fonction des seules données de l'énoncé. En déduire que  $T'_2 = \frac{T_1.T_2}{T'_1}$
  - (c) Calculer  $Q_C$ ,  $Q_F$  et  $W$  (A.N. pour  $n=10$ )
  - (d) Calculer l'efficacité de ce climatiseur. Commenter.

*Commentaire : Cet exercice, extrait de concours, se concentre sur le fonctionnement d'un climatiseur. Il est bien posé et les calculs doivent être fait rapidement (et toujours sans erreurs).*

## 1.11 Le moteur automobile.

1. Le moteur d'automobile comporte 4 cylindres fonctionnant selon un cycle à 4 temps. En régime permanent, la puissance développée au niveau des pistons est de  $40\text{kW}$ . Le rendement du moteur est  $r=0,35$ . Déterminer en kilocalories par seconde la quantité de chaleur  $\dot{Q}_1$  fournie par la combustion de l'essence et la quantité de chaleur  $\dot{Q}_2$  évacuée par le système de refroidissement.
2. L'essence utilisée ayant un pouvoir calorifique de  $11500\text{kcal.kg}^{-1}$  et sa densité étant de  $0,72$ , trouver la consommation du moteur en litre par heure. ( $1\text{ Cal}=1\text{ kcal}=4,18\text{J}$ ).

*Commentaire : Cet exercice est en réalité une simple application numérique. Pensez à vous aider de l'analyse dimensionnelle pour trouver les bonnes formules.*

## 1.12 Variation infinitésimale de température dans un frigo.

Pour étudier les échanges de chaleur avec le milieu extérieur et un réfrigérateur, on débranche le moteur, la température intérieure étant  $T_2 = 268\text{K}$ . Au bout de 6 heures, cette température est de

$T' = 273K$ . On admet que pendant un intervalle de temps infinitésimal  $dt$  compris entre  $t$  et  $t+dt$ , la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur est donnée par  $\delta Q = -aC(T(t) - T_1)dt$  où  $T_1$  désigne la température extérieure constante de 298K,  $T(t)$  la température dans le réfrigérateur à l'instant  $t$ ,  $C$  la capacité calorifique du réfrigérateur et  $a$  une constante.

1. Commenter le signe de  $\delta Q$
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(t)$ .
3. En déduire  $T(t)$ .
4. Donner la dimension de la constante  $a$ . Calculer sa valeur.
5. On définit le coefficient d'efficacité  $e$  du réfrigérateur comme le rapport de la quantité de chaleur enlevée au frigo et le travail dépensée. calculer, en fonction de  $a$ ,  $C$ ,  $e$ ,  $T_1$  et  $T_2$  la puissance minimale à fournir pour maintenir la température constante  $T_2 = 268K$  dans le frigo. A.N. pour  $e=3$  et  $C=2.10^5 J.K^{-1}$

*Commentaire : Cet exercice est un extrait de l'ENSTIM. Comme le bilan s'effectue sur une durée  $dt$ , il faut penser à écrire tous les bilans de manière infinitésimale.*

## 1.13 Bilan sur un cycle.

Une mole de gaz parfait de capacité calorifique à volume constant  $C_V m = \frac{5R}{2}$  est contenu dans un cylindre vertical calorifugé comportant un piston mobile lui aussi calorifugé de section  $S = 0,01m^2$ , de masse négligeable, au contact de l'atmosphère  $p_0 = 10^5 Pa$ , contenant une mole de gaz parfait à la température initiale  $T_0 = 300K$ . Le champ de pesanteur est  $g = 9,81m.s^{-2}$ ,  $R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}$ .

1. Sachant que le gaz dans l'enceinte est l'air, discuter le modèle que propose implicitement l'énoncé.
2. Justifier que la pression dans l'état initial est  $P_0$ .
3. Dans un premier temps, on pose brusquement la masse  $M = 102kg$  sur la partie mobile du piston. Etudier l'état d'équilibre (1) ainsi obtenu ( $T_1, P_1, V_1$ ). Calculer  $W_1$  et  $Q_1$ . La transformation est elle réversible?
4. Partant de l'état (1), on souhaite ramener le système dans son état initial. On supprime la surcharge et un opérateur déplace lentement le piston jusqu'à ce que  $V_2 = V_0$ . Etudier l'état d'équilibre (2) ainsi obtenu ( $T_2, P_2, V_2$ ). Calculer  $W_2$  et  $Q_2$ . La transformation est elle réversible?
5. Partant de l'état (2), toujours pour ramener le système dans son état initial, on bloque le piston et on supprime donc les éléments qui calorifugeaient le système, qui se retrouve au contact de l'atmosphère à la température  $T_0 = 300K$ . Etudier l'état d'équilibre (3) ainsi obtenu ( $T_3, P_3, V_3$ ). Calculer  $W_3$  et  $Q_3$ . La transformation est elle réversible?
6. Calculer  $W_{tot}$ ,  $Q_{tot}$ , s'agit-il d'un moteur? Cette machine est elle réversible?

*Commentaire : Un exercice d'oral qui a l'originalité d'inclure une transformation monobare (ce qui est rare) dans son bilan. Réponse: 1. GPM 2.  $T_1 = \frac{9}{7}T_0 = 386K$ ,  $P_1 = 2bar$ ,  $V_2 = 1,6.10^{-2}m^3$  (avec  $V_0 = 2,49.10^{-2}m^3$ )  $S_{creee 0 \rightarrow 1} = 1,57J.K^{-1}.mol^{-1}$  3.  $T_2 = (\frac{V_1}{V_2})^{2/5}T_1 = 323K$ ,  $P_2 = 1,078bar$  4.  $0 \equiv 3$   $\Delta S_{2 \rightarrow 3} = -1,57J.K^{-1}.mol^{-1}$   $S_{creee 2 \rightarrow 3} = 0,02J.K^{-1}.mol^{-1}$  5. Sens non trigo: moteur*

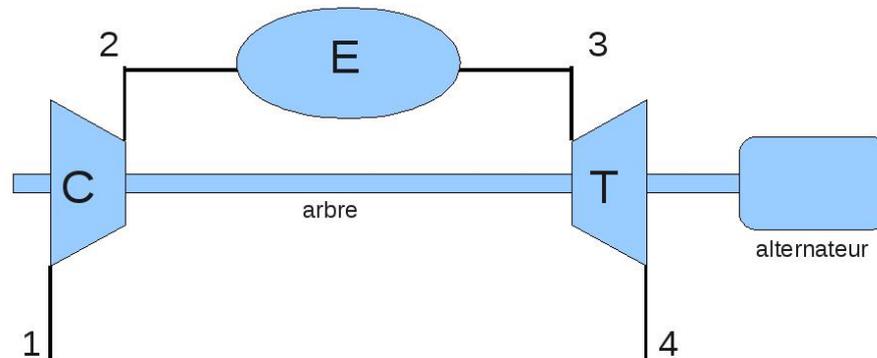


FIGURE 1.1 – Les enceintes de la turbochine

## 1.14 Turbomachine.

*Objectifs :*

1. *Savoir faire un bilan énergétique sur un système ouvert en régime permanent.*
2. *Savoir étudier un cycle thermodynamique sur une machine à plusieurs compartiments en régime permanent.*

On considère un Gaz Parfait dont l'écoulement est en régime permanent qui circule dans une installation qui comporte trois enceintes.

La première enceinte qui transforme le fluide de l'état 1 à l'état 2 est un compresseur aux parois adiabatiques.

La seconde enceinte qui transforme le fluide de l'état 2 à l'état 3 est un échangeur thermique où la température du fluide est augmentée.

La troisième enceinte qui transforme le fluide de l'état 3 à l'état 4 est une turbine adiabatique. Le travail récupéré dans la turbine sert à la fois à alimenter le compresseur et faire fonctionner l'alternateur.

Toutes les évolutions sont irréversibles. En outre on néglige toute variation d'énergie mécanique (ni variation de hauteur, ni variation de vitesse) de telle sorte que seule l'énergie du fluide évolue.

$$c_P = 1 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

	1	2	3	4
P(bar)	1	8,3	8	1
T(K)	293	576	1260	760

1. Par analogie avec la détente de Joule-Thomson, montrer que dans une enceinte quelconque,  $\Delta h = w' + q$  où  $h$  désigne l'enthalpie massique,  $w'$  le travail massique utile dans l'enceinte et  $q$  le transfert thermique massique dans l'enceinte.
2. Calculer le travail et la chaleur sur chacune des transformations. En déduire le travail disponible pour l'alternateur.
3. Calculer le rendement  $\eta$  de l'installation

*Commentaires :*

1. *Il faut être capable de faire un bilan sur une enceinte en régime permanent. Le résultat et la démonstration sont essentiels.*
2. *Contrairement au piston du moteur de voiture, ici chaque transformation thermodynamique a lieu dans une enceinte différente. Beaucoup de machine thermique fonctionne sur ce mode.*

2.  $w_u = 684.kJ.kg^{-1}$  et 3.  $\eta = 0,32$

## 1.15 Etude d'un échangeur thermique.

Un échangeur thermique est une enceinte calorifugée contenant deux tuyaux où deux fluides circulent en sens inverse l'un de l'autre. Il est étudié en régime permanent. Dans le premier tuyau, un fluide de débit massique  $D_1$  et rentre à la température  $T_1$  de  $50^\circ C$ . Dans le second tuyau, le même fluide de débit massique  $D_2 = 2.D_1$  rentre à la température  $T_2$  de  $12^\circ C$ .

1. On suppose l'échangeur très long, de telle sorte que l'équilibre thermique entre les deux fluides soit atteint lorsque les fluides sortent de part et d'autre de l'échangeur. Calculer  $T_f$
2. En réalité, la température final du fluide côté 1 est  $T'_1 = 42^\circ C$ , calculer alors la température  $T'_2$  en sortie côté 2.

*Commentaire : Les échangeur thermiques sont le siège d'échange thermique et ne possèdent pas de partie mobile. Un bon conducteur de la chaleur sépare les deux tuyau mais l'ensemble est bien calorifugé afin que toute la chaleur cédée par le fluide 1 passe au fluide 2.*

## 1.16 Pompe à chaleur.

L'installation de la figure 3 est une pompe à chaleur fonctionnant entre la source chaude constituée du local à chauffer à  $T_C = 293K$  et la source froide, l'atmosphère à  $T_F = 268K$ .

L'air, assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M = 29g.mol^{-1}$  et de  $\gamma = 1,4$  est prélevé dans l'atmosphère dans l'état  $E_1$  ( $P_1 = 1$  bar,  $V_1$ ,  $T_1 = 268K$ ).

Il traverse alors un échangeur thermique (ET) et sort à l'état  $E_2$  ( $P_2 = 1$  bar,  $V_2$ ,  $T_2$ ).

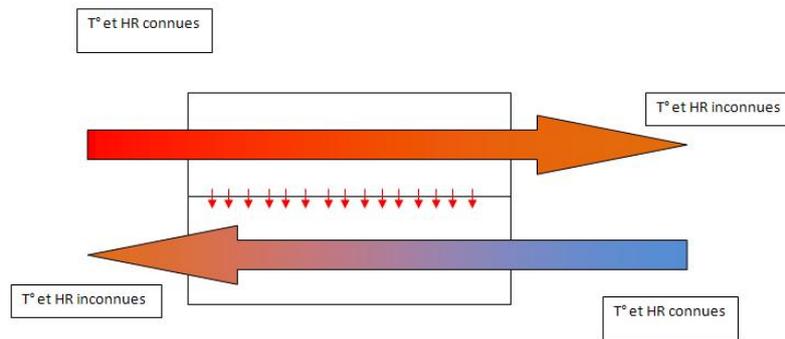


FIGURE 1.2 – Echangeur thermique

Dans cette échangeur, il croise un fluide qui évolue de  $E_4$  ( $P_4 = 2 \text{ bar}$ ,  $V_4$ ,  $T_4$ ) à  $E_5$  ( $P_5 = 2 \text{ bar}$ ,  $V_5$ ,  $T_5 = 268K$ ). Donc  $T_4 = T_2$  et  $T_5 = T_1$ .

L'air traverse alors le local chauffé (L) où il cède un transfert thermique à la source chaude et évolue de  $E_2$  ( $P_2$ ,  $V_2$ ,  $T_2$ ) à  $E_3$  ( $P_3$ ,  $V_3$ ,  $T_3 = 293K$ ).

Il est ensuite comprimé réversiblement dans le compresseur ( $C_p$ ) calorifugé et passe de  $E_3$  à  $E_4$ . Il traverse l'échangeur thermique passant de  $E_4$  ( $P_4 = 2 \text{ bar}$ ,  $V_4$ ,  $T_4$ ) à  $E_5$  ( $P_5 = 2 \text{ bar}$ ,  $V_5$ ,  $T_5 = 268K$ ). Enfin il se détend réversiblement dans la turbine calorifugée passant de  $E_5$  ( $P_5 = 2 \text{ bar}$ ,  $V_5$ ,  $T_5 = 268K$ ) à  $E_6$  ( $P_6 = 1 \text{ bar}$ ,  $V_6$ ,  $T_6$ ).

L'installation fonctionne en régime permanent avec un débit massique identique dans tous les éléments de l'installation. On raisonne sur une durée  $\tau$  correspondant au transfert d'un kilogramme d'air dans le cycle.

1. Justifier la valeur de  $M$  choisi pour l'air.
2. Calculer  $T_4$ .
3. Calculer  $W_{3 \rightarrow 4}$  reçu dans le compresseur  $C_P$ .
4. Calculer  $T_6$  et  $W_{5 \rightarrow 6}$ .
5. Sachant que la turbine est utilisée pour entraîner partiellement le compresseur ; calculer le travail  $W$  effectivement reçu par l'installation.
6. Calculer  $Q_C$  reçu à la traversée du local.
7. Calculer  $e_{pompe}$  et comparer à  $e_{pompe \text{ Carnot}}$ . Commenter.

*Commentaire : Ce problème de concours est un excellent problème de révision sur la thermodynamique : il aborde les systèmes ouverts en régime permanent et les machines thermiques, ici la pompe à chaleur, conçues en mettant ainsi plusieurs enceintes en circuit.*

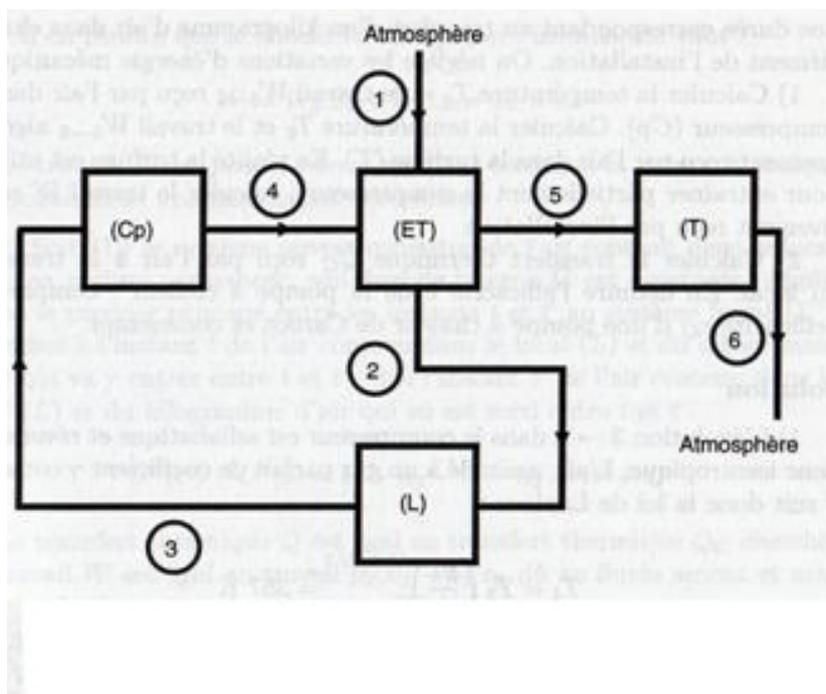


FIGURE 1.3 – Pompe à Chaleur

## 1.17 Un problème de robinet.

Un récipient de volume  $V$ , muni d'un robinet, contient de l'air assimilé à un gaz parfait à la température  $T_0$  et à la pression  $P_0(1 - \epsilon)$ . Le milieu extérieur est lui à  $T_0$  et  $P_0$ . On entrouvre le robinet et l'air extérieur pénètre lentement.

1. On considère les parois du récipient diathermes. Calculer le travail et la chaleur fournis par le milieu extérieur.
2. On considère les parois du récipient adiabatiques (ou athermanes). Déterminer la température finale dans le récipient. Calculer le travail et la chaleur fournis par le milieu extérieur.

*Commentaire : Un exercice présent dans les retours de concours qui suppose du recul sur la thermodynamique pour définir proprement le système **fermé** et déterminer la nature de la transformation.*

## 1.18 Chaleur fournie lors du changement d'état.

*Objectifs :*

1. *Savoir faire un bilan énergétique lors du changement d'état au contact d'un thermostat : décrire les étapes de la transformation.*
2. *Savoir faire dans les mêmes conditions le bilan d'entropie donc calculer l'entropie créée.*

1kg d'eau liquide, à la température  $T_0 = -5^\circ\text{C}$  est mise dans un piston mobile, sans frottement et de masse négligeable au contact de l'atmosphère de pression  $P_e = 10^5\text{Pa}$ . Ce piston aux parois diathermes est placée au contact d'une flamme qui se comporte comme un thermostat à la température de  $T_e = 110^\circ\text{C}$ .

1. Justifier que l'eau soit initialement dans l'état glace.
2. Quel est l'état final de l'eau ?
3. Justifier l'utilisation de l'enthalpie pour étudier la transformation.
4. Calculer la chaleur reçue par le système.
5. Cette transformation est elle réversible ?
6. Un opérateur extérieur arrête la flamme alors que 10% de la masse d'eau est passée sous forme vapeur. Calculer la chaleur reçue par le système jusqu'à ce que l'opérateur arrête la flamme.

Données :

$C_{eau(s)} = 2,09\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $C_{eau(l)} = 4,18\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , l'eau vapeur sera assimilé à un gaz parfait de capacité calorifique  $C_v = 1,18\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . La chaleur latente de fusion et de vaporisation de l'eau sont  $l_F = 334\text{kJ.kg}^{-1}$   $l_V = 2265\text{kJ.kg}^{-1}$ .

*Commentaire : Si les étapes de la transformation sont bien identifiées, chaque étape consiste en l'application d'une situation immédiate du cours. Cet exercice très très classique est un modèle de raisonnement en la matière.*

## 1.19 Détermination de l'état final.

*Objectifs :*

1. *Savoir faire un bilan énergétique lors du changement d'état dans un calorimètre : décrire les étapes de la transformation pour chacune des phases initialement présente.*
2. *Savoir faire dans les mêmes conditions le bilan d'entropie donc calculer l'entropie créée.*

Un récipient à parois rigides adiabatiques contient une masse  $M_0 = 1\text{kg}$  de glace à la température  $T_0 = 273^\circ\text{K}$  sous la pression atmosphérique normale.

On verse dans ce récipient une masse  $M$  d'eau liquide à la température  $T = 278^\circ\text{K}$ .

$C_{eau} = 4,18\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , et la chaleur latente de fusion de la glace est  $L = 334\text{kJ.kg}^{-1}$ .

1. Discuter qualitativement les différentes situations finales possibles, en fonction d'une valeur particulière  $M_1$  que l'on calculera.
2. Si  $M=20\text{Kg}$ , calculer l'état final.
3. Si  $M=100\text{g}$ , calculer l'état final.

*Commentaire : La démarche de cet exercice est très semblable à la démarche de l'exercice précédent : décrire les étapes de la transformation de l'état initial à l'état final. Néanmoins, il faut y ajouter l'extensivité des fonctions  $H$  et  $S$  pour faire le calcul sur chacune des phases initialement présentes.*

## 1.20 Evolution d'un mélange diphasé : l'eau glace et eau vapeur.

Un piston mobile au contact de l'atmosphère  $p_0 = 1\text{bar}$ , à parois adiabatiques contient une masse  $(1-x)\text{kg}$  de vapeur d'eau à  $T_{\text{ebullition}} = 373^\circ\text{K}$  et  $x\text{kg}$  la glace à la température  $T_{\text{fusion}} = 273^\circ\text{K}$  y est introduit.

1. On suppose la température finale à  $T_F$ . Quel est alors l'état du système? Montrer que cette situation est possible ssi  $x < x_m$ .
2. On suppose la température finale à  $T_E$ . Quel est alors l'état du système? Montrer que cette situation est possible ssi  $x > x_M$ .
3. Déterminer la température finale  $T$  lorsque  $x_m < x < x_M$ . A.N. si  $x=0,8$ .

Données :

$C_{\text{eau}} = 4,18\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , et la chaleur latente de fusion de la glace et de vaporisation de l'eau sont  $l_F = 330\text{kJ.kg}^{-1}$  et  $l_V = 2300\text{kJ.kg}^{-1}$ .

Réponse: 1.  $x > 0,755$ , 2.  $x < 0,892$  3.  $T = 340\text{K}$

## 1.21 Piston et changement d'état de l'eau.

Un cylindre aux parois diathermes contient une masse  $m = 500\text{g}$  d'eau à l'état de vapeur saturante dans l'état 1  $T_1 = 373\text{K}$  et  $p = 1\text{atm}$ . Il est fermé sur un piston sans masse, pouvant coulisser sans frottement. Le piston mobile est au contact de l'atmosphère,  $T_0 = 290\text{K}$   $p_0 = 1\text{atm}$ .

Quel est l'état final? Calculer  $W$  et  $Q$  lors de la transformation. Cette transformation est-elle réversible?

données :

chaleur latente massique de vaporisation  $l_v(373\text{K}) = 2260\text{kJ.kg}^{-1}$ .

capacité calorifique de l'eau  $c = 4,18\text{kJ.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ .

volume massique de la vapeur à  $373\text{K}$  sous  $p_0$   $v_v = 1,67\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$ .

volume massique de l'eau liquide à  $290\text{K}$  sous  $p_0$   $v_l = 10^{-3}\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$ .

## 1.22 Etude partielle d'une machine à vapeur.

Objectifs :

1. *Savoir faire un bilan énergétique lors du changement d'état en utilisant les tables thermodynamiques (et donc le théorème du moment).*
2. *Savoir faire dans les mêmes conditions le bilan d'entropie donc calculer l'entropie créée.*

Dans une machine à vapeur, le travail est fourni par la détente d'une vapeur saturante sèche dans un piston. La détente est supposée adiabatique et réversible. L'état initial est  $T_1 = 485\text{K}$ , et  $p_1 = \Pi(T_1) = 20\text{bars}$ . L'état final est  $T_2 = 373\text{K}$ , et  $p_2 = \Pi(T_2) = 1\text{bars}$ .

1. Faites un diagramme de Clapeyron.
2. Calculer le titre  $x_v$  à l'aide des données du tableau.
3. Retrouver ce résultat à l'aide de l'aide des données suivantes :  
 $l(T_1) = 1892 \text{ kJ.kg}^{-1}$ ,  $l(T_2) = 2258 \text{ kJ.kg}^{-1}$  et  $c = 4,18 \text{ J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ .

		$x_v = 0$			$x_v = 1$		
T	P	$v_L$	$h_L$	$s_L$	$v_V$	$h_V$	$s_V$
K	bar	$\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$	$\text{kJ.kg}^{-1}$	$\text{kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$	$\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$	$\text{kJ.kg}^{-1}$	$\text{kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$
485	20	$1,18.10^{-3}$	909	2,45	0,0998	2801	6,35
373	1	$1,04.10^{-3}$	418	1,30	1,70	2676	7,36

*Commentaire : L'exercice qui peut paraître complexe au premier abord se résume comme toujours en thermodynamique à une bonne lecture de l'énoncé et l'utilisation du théorème des moments.*

## 1.23 Bilan lors du changement d'état du Mercure.

1. Un récipient à parois diathermanes mobile contient une masse  $M_0 = 8\text{kg}$  de mercure liquide à la température  $T_1 = 573^\circ\text{K}$ .
  - a. Partant d'un grand volume, le mercure est lentement comprimé. Décrire l'évolution sur le diagramme de Clapeyron. Comment se nomme la courbe ainsi tracée.
  - b. La vapeur est elle sèche ou saturante pour  $V_0 = 8,00\text{m}^3$  et  $V_1 = 1\text{m}^3$ . Quel est le titre en vapeur dans chaque cas.
2. Une résistance chauffante à  $T_3 = 800\text{K}$  amène le mercure de  $T_1$  à  $T_2 = 673\text{K}$ . Lors de cette transformation, le volume est fixé  $V = 1\text{m}^3$ .
  - a. Représenter la transformation réalisée dans le diagramme de Clapeyron.
  - b. Calculer le titre massique final en vapeur ainsi que la variation de quantité de liquide entre l'état initial et l'état final.
  - c. Calculer l'énergie thermique reçue par le mercure.
  - d. Que dire de la réversibilité de la transformation ?

Données :

$$v_L = 7,7.10^{-5}\text{m}^3.\text{kg}^{-1}, v_V(T_1) = 0,7\text{m}^3.\text{kg}^{-1}, \text{pression de vapeur saturante } \Pi(T_1) = 0,33\text{bar}$$

$$v_V(T_2) = 0,128\text{m}^3.\text{kg}^{-1}, \Pi(T_2) = 2,10\text{bar}$$

Réponse: 1.  $x_0 = 1$  vapeur sèche,  $x_1 = 0,178$  2.  $x_2 = 0,976$   $Q = \Delta U = 1800\text{kJ}$   $S_{\text{creee}} = 0,59\text{kJ.K}^{-1}$  *Commentaire : L'exercice propose d'aborder le changement d'état d'un autre corps que l'eau mais la démarche reste la même.*

## 1.24 Eau liquide et eau vapeur.

De l'eau liquide est en équilibre avec sa vapeur à la température  $T_0 = 394\text{K}$  et à la pression  $P_0 = 2\text{atm}$ . La masse d'eau est  $m = 9\text{g}$ , et le volume total occupé est  $V_0 = 4,7\text{l}$ .

1. Déterminer le titre en vapeur du mélange. (Quel terme est négligeable dans l'A.N.)
2. Le système est alors mis dans un thermostat à la température  $T_F = 478K$ . Calculer  $Q$  fournie par le thermostat si l'on maintient la pression extérieure constante, à  $P_0$ . La transformation est elle réversible? Commenter.

Données :

$$v_V(394K) = 858dm^3.kg^{-1}, v_L(394K) = 1,06dm^3.kg^{-1}, v_V(412K) = 522dm^3.kg^{-1}$$

$$h_V(394K) = 2710kJ.kg^{-1}, h_L(394K) = 509kJ.kg^{-1}, h_V(478K) = 2890kJ.kg^{-1}.$$

réponse:  $x = \frac{v_0 - v_L}{v_V - v_L} = 0,61$   $Q = 9,38kJ$ . *Commentaire : L'exercice demande une lecture soignée de l'énoncé et une analyse avec les données fournies.*

## 1.25 Machine à vapeur.

La machine à vapeur est un circuit fermé dans lequel transite un kg d'eau sous deux phases liquide et vapeur décrit par un cycle ABCD. Les évolutions BC et DA sont adiabatiques et réversibles; AB et CD sont isothermes-isobares.  $x$  désigne le titre en vapeur. La machine fonctionne entre les sources chaudes et froides à  $T_C = 485K$  et  $T_F = 373K$

	A	B	C	D
p en bar	20	20	1	1
T en K	485	485	373	373
x	0	1	$x_C$	$x_D$

		$x_v = 0$			$x_v = 1$		
T	P	$v_L$	$h_L$	$s_L$	$v_V$	$h_V$	$s_V$
K	bar	$m^3.kg^{-1}$	$kJ.kg^{-1}$	$kJ.K^{-1}.kg^{-1}$	$m^3.kg^{-1}$	$kJ.kg^{-1}$	$kJ.K^{-1}.kg^{-1}$
485	20	$1,18.10^{-3}$	909	2,45	0,0998	2801	6,35
373	1	$1,04.10^{-3}$	418	1,30	1,70	2676	7,36

1. Calculer  $x_C$  et  $x_D$ ,  $v_C$  et  $v_D$ ,  $h_C$  et  $h_D$ ,  $u_C$ ,  $u_D$ ,  $u_A$ ,  $u_B$ .
2. Calculer les travaux et les transferts thermiques reçus par l'eau au cours de chaque transformation puis  $W_{tot}$ .
3. Faire le bilan entropique pour chaque transformation.
4. Définir l'efficacité  $e$  de la machine à vapeur et la calculer.

*Commentaire : Un problème de concours qui peut servir de révision sur le sujet.*

Réponse  $x_C = 0,833$ ,  $x_D = 0,190$ ,  $v_C = 1,42m^3.kg^{-1}$ ,  $v_D = 0,324m^3.kg^{-1}$ ,  $h_C = 2299kJ.kg^{-1}$ ,  $h_D = 847kJ.kg^{-1}$ ,  $u_C = 2157kJ.kg^{-1}$ ,  $u_D = 815kJ.kg^{-1}$ ,  $u_A = 907kJ.kg^{-1}$ ,  $u_B = 2601kJ.kg^{-1}$   
 $w_{AB} = -197kJ.kg^{-1}$ ,  $q_{AB} = 1892kJ.kg^{-1}$   $w_{BC} = -444kJ.kg^{-1}$ ,  $w_{CD} = 109kJ.kg^{-1}$ ,  $q_{CD} = -1452kJ.kg^{-1}$   
 $w_{DA} = 92kJ.kg^{-1}$   $w_{tot} = -440kJ.kg^{-1}$   $e = 0,23 = e_{Carnot}$



# Chapitre 2

## Energie libre et enthalpie libre.

### 2.1 Problème de surfusion.

L'eau est dite surfondue si elle reste liquide en dessous de  $0^{\circ}\text{C}$ . Il est possible en laboratoire d'avoir de l'eau jusqu'à  $-5^{\circ}\text{C}$  et certains semblent avoir obtenus des températures inférieures à  $-15^{\circ}\text{C}$  (eau très pure dans environnement très contrôlé.)

Pour rendre compte de la surfusion, il faut adopter un modèle plus complexe que dans le cours dans la mesure où nous avons montré dans le modèle du cours que dès que la température descend en dessous de  $0^{\circ}\text{C}$ , le potentiel chimique de la phase solide est inférieure au potentiel chimique de la phase liquide et donc la totalité de l'eau devrait se transformer en eau solide.

Qualitativement l'eau en dessous de  $0^{\circ}\text{C}$  est un état métastable, alors que l'eau dans l'état solide est un état stable. L'eau peut donc être piégé dans l'état métastable jusqu'à ce qu'une perturbation suffisante transforme l'eau liquide (l) (état métastable) en eau solide (s) (état stable).

Modélisation de la situation rencontrée :

1. On s'intéresse à un récipient de forme sphérique de rayon  $R$ .
2. L'eau solide est l'état stable donc, en terme d'enthalpie libre molaire,  $G_{m(s)}(T) < G_{m(l)}(T)$  (ou si vous préférez avec des notations plus chimiques  $\mu_{(s)}(T) < \mu_{(l)}(T)$ )
3. Pour rendre compte de l'existence d'un état métastable, on prend en compte le phénomène de tension superficielle. Pour créer une interface solide liquide il faut fournir une énergie au système proportionnelle à la surface de l'interface.

L'enthalpie libre du système contenant une petite sphère de glace de rayon  $r$  dans du liquide est donc

$$G(r, T) = \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3\right)\mu_{(l)}(T) + \frac{4}{3}\pi r^3\mu_{(s)}(T) + 4\pi r^2 A$$

1. A l'aide du premier principe de la thermodynamique, montrer que pour une évolution isotherme et isobare, la fonction enthalpie libre est le potentiel thermodynamique de l'évolution. Rappeler à cette occasion par une phrase la définition d'un potentiel thermodynamique.

2. Interpréter qualitativement l'expression de  $G$  donnée.
3. Etudier la fonction  $G(r)$  Chercher les états d'équilibre en vous aidant d'un graphique.
4. Calculer l'énergie d'activation pour passer de l'équilibre métastable à l'équilibre stable.
5. Calculer la taille  $r_c$  du germe de glace à introduire pour briser l'équilibre métastable.

*Commentaire : D'après écrit Mines et oraux divers. Un problème assez simple de potentiel thermodynamique. La première partie est une question de cours. La recherche des extréma de  $G$  est intéressante mais doit être complétée par un graphique. Toute la physique se fait sur le graphique! La notion d'équilibre métastable est intéressante. Des modèles similaires explique la formation des nuages,...*

## 2.2 Etude thermodynamique d'un élastique.

On souhaite étudier les propriétés thermodynamique d'un élastique soumis à une force  $F$ , de longueur à vide  $x_0$ . En présence de la force, l'abscisse de l'extrémité du ressort à l'équilibre est  $x$ . On note  $\Phi = U - TS = C_L.T - T.C_L.\ln(T) - \frac{kT}{2}(x - x_0)^2$

1. Etablir l'identité thermodynamique de  $U$  :  $dU = TdS - Fdx$
2. En déduire  $d\Phi$
3. Commenter brièvement l'expression de  $\Phi$
4. En déduire  $F$ ,  $\Delta S$  et de  $\Delta U$ . Commenter.
5. On exerce sur l'élastique une force  $F$  variable de telle sorte que sa longueur passe de  $x_0$  à  $2x_0$  de manière adiabatique et réversible. Déterminer la température  $T_1$  dans la barre en fonction de  $T_0$ .
6. L'élastique est alors laissé dans un thermostat à température  $T_0$ , la force  $F$  étant constante. Déterminer la chaleur reçue par l'élastique. La transformation est elle réversible.

*Commentaire : D'après écrit. Un problème qui utilise la fonction énergie libre (rebaptisée  $\Phi$  pour l'occasion, pour éviter les confusions avec la force) comme fonction caractéristique. Il suffit d'adapter ce qui a été vu dans le cours, l'exercice est guidée, et d'étudier les transformations demandées après les avoir identifier.*

## 2.3 Transition supraconducteur conducteur.

Le plomb est un métal conducteur (C). Mais à très basse température dans un champ magnétique faible il devient supraconducteur (S). Sa résistivité devient strictement nulle.

Pour décrire les propriétés magnétiques d'un milieu, on utilise le champ magnétique  $\vec{B}$ , l'aimantation  $\vec{M}$  et finalement l'excitation magnétique  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ . Le travail élémentaire lors d'une évolution réversible s'écrit  $\delta W = \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M}$ .

1. A l'aide du premier et du second principe appliquée à une transformation réversible, montrer que  $dU = TdS + \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{M}$

2. On pose alors  $G = U - TS + \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{M}$   
 Montrer que  $dG = -SdT - \mu_0 \vec{M} \cdot d\vec{H}$

3. On donne alors pour chacun des deux états conducteur (C) et supraconducteur (S)

$$G_{m(C)} = -\frac{1}{2}\gamma T^2$$

$$G_{m(S)} = -\frac{1}{2}\gamma T^2 - \frac{\alpha^2}{2\mu_0} \left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right)^2 - \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

4. En déduire les expressions de  $\vec{M}$  et puis de  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$  dans chacune des deux phases (S) et (C).
5. Discuter la stabilité des deux phases selon les valeurs de  $\vec{H}$  et T. Etudier la courbe d'équilibre  $H_{eq}(T)$
6. Calculer les entropies molaires  $S_{m(C)}$  et  $S_{m(S)}$ . Commenter les valeurs à  $T = 0$ . Calculer la chaleur latente de changement d'état. Commenter son signe.

*Commentaire : D'après oral X ENS. Un exercice plus difficile qui fait référence à la théorie de Landau de la transition pour la recherche d'exposant critique (comportement des divers paramètres en fonction de la température à l'approche de la transition). Les résultats obtenus sont intéressants (comme par exemple le fait que le supraconducteur expulse les lignes de champ magnétique) mais demande du recul sur le chapitre et des connaissances solides la supraconductivité, ce qui rend l'exercice sélectif.*



# Chapitre 3

## Diffusion de particules

### 3.1 Approximation des régimes stationnaires dans un tube.

Le dispositif expérimental est le suivant : un tube fin de rayon  $r$ , de longueur  $L$ , relie deux réservoirs de grand volume  $V$  identique, remplis d'eau. La hauteur d'eau est la même de part et d'autre du tube, si bien qu'il n'y a pas de convection, pas de mouvement de l'eau. Le réservoir de gauche, en  $x=0$ , contient  $N_1 = n_1.V$  particules de colorant alors que le second réservoir, à l'extrémité  $x=L$  du tube, en contient lui une quantité  $N_2$ . Le colorant diffuse donc dans le tube. Le coefficient de diffusion de ce colorant dans l'eau est noté  $D$ .

1. Redémontrer l'équation de conservation du nombre de particules dans la barre en supposant la diffusion unidimensionnelle selon  $x$ .
2. Après avoir rappelé la loi phénoménologique de Fick, retrouver l'équation de diffusion unidimensionnelle selon  $x$ .
3. On suppose dans cette question le régime stationnaire dans le tube.
  - (a) Simplifier l'équation de diffusion.
  - (b) Etablir l'expression de  $n(x)$  la densité de colorant dans le tube à l'abscisse  $x$ .
  - (c) En déduire alors  $\vec{j}_N$ . Commenter.
  - (d) Calculer  $\delta N(x = 0)$  le nombre de particules traversant la section en  $x=0$  (entrée) de la barre.
  - (e) Calculer  $\delta N(x = L)$  le nombre de particules traversant la section en  $x=L$  (sortie) de la barre. Commenter.
  - (f) Justifier alors que le régime ne puisse être strictement stationnaire.
4. On souhaite valider les résultats de la question précédente en se plaçant en régime quasi stationnaire.
  - (a) A partir des résultats obtenus précédemment, trouver les deux équations couplées liant  $n_1(t)$  et  $n_2(t)$  (uniforme dans les grands réservoirs)
  - (b) Les résoudre en posant  $\Sigma(t) = n_1(t) + n_2(t)$  et  $\Delta(t) = n_1(t) - n_2(t)$

(c) Valider alors l'ARQS. Commenter le résultat.

*Commentaire : D'après CCP. Un problème très classique, très détaillé et très proche du cours. La démonstration de l'équation de diffusion est demandée à une dimension. L'étude en régime stationnaire est simple, la validation de l'ARQS se fait en comparant le temps de diffusion dans la barre et le temps caractéristique des variations de  $n_1(t)$  et  $n_2(t)$ , qui s'obtient en faisant le bilan des particules dans le réservoir.*

### 3.2 Solution autosimilaire de l'équation de diffusion.

On considère un tube cylindrique supposé infini de  $x=-\infty$  à  $x=+\infty$  et de rayon  $R$ , remplie d'eau.  $N_0$  particules de colorant sont introduites à  $t=0$  en  $-a < x < a$  avec  $a \ll R$ . Le coefficient de diffusion de ce colorant dans l'eau est noté  $D$ .

1. Redémontrer l'équation de conservation du nombre de particules dans la barre en supposant la diffusion unidimensionnelle selon  $x$ .
2. Après avoir rappelé la loi phénoménologique de Fick, retrouver l'équation de diffusion unidimensionnelle selon  $x$ .
3. Justifier que les C.L. sont  $n(x = -\infty) = 0$  et  $n(x = +\infty) = 0$ .  
Justifier brièvement que la C.I. puisse s'écrire  $\int_{-\infty}^{\infty} n(x, t = 0) dx \cdot \pi R^2 = N_0$ .  
Il existe une unique solution à l'équation de diffusion satisfaisant les C.I. et les C.L. proposées.  
La suite de ce problème propose d'étudier partiellement cette solution.
4. Justifier brièvement par un argument physique que  $\int_{-\infty}^{\infty} n(x, t) dx \cdot \pi R^2 = N_0$  est vrai  $\forall t > 0$ .
5. Pour chercher la solution, nous allons chercher les lois d'invariance d'échelle. On cherche donc une solution de la  $n'(x, t) = p \cdot n(p \cdot x, q \cdot t)$  où  $n'$  est aussi solution de l'équation de diffusion. (On cherche quelle dilatation de l'espace et du temps laisse le problème invariant.)  
Montrer que  $n'(X, T) = q^{0.5} \cdot n(q^{0.5} \cdot x, q \cdot t)$  est une solution autosimilaire.
6. Justifier que l'on puisse alors poser  $q = \frac{1}{t}$ , en quoi cela simplifie-t-il le problème.
7. Dans la question précédente, on est parvenu à montrer que  $n(x, t)$  devait s'écrire sous forme  $n(x, t) = \frac{f(u)}{t^{0.5}}$ . En injectant cette forme dans l'équation différentielle, on trouve (le calcul est possible mais fastidieux et non demandé) donne

$$\frac{d}{du}(u^{0.5} f(u)) = -4D \frac{d}{du}(u^{0.5} \frac{df}{du})$$

En déduire alors que  $f(u) = A \cdot \exp(-\frac{u}{4D})$

Soit  $n(x, t) = A \cdot \frac{1}{(Dt)^{0.5}} \exp(-\frac{x^2}{4Dt})$

8. Comment calculer  $A$ ? Montrer que  $A = \frac{N_0}{\pi R^2 (4\pi)^{0.5}}$
9. Discuter les graphiques représentant la solution.

*Commentaire : D'après Mines. Un problème difficile et assez calculatoire mais qui demeure intéressant. La technique de recherche d'équation par invariance par changement d'échelle est très porteuse en physique. On parle de renormalisation du problème bien qu'ici l'approche soit simple.*

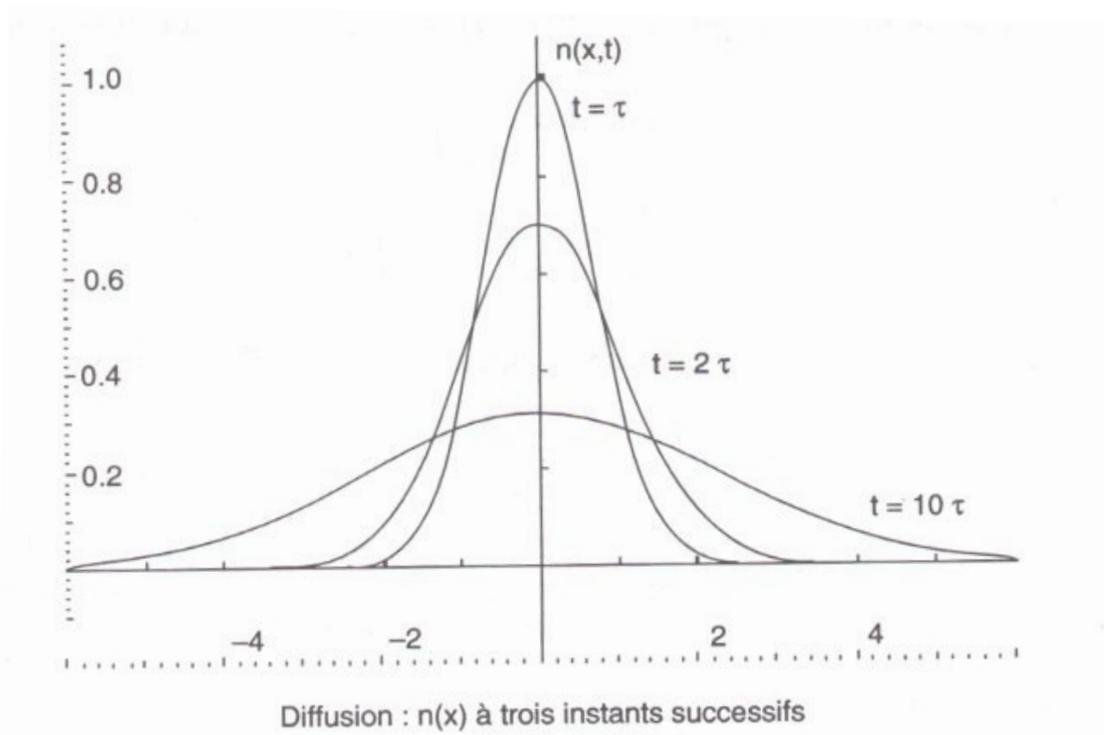


FIGURE 3.1 – Solution autosimilaire de l'équation de diffusion à divers instants donné en fonction de  $x$

### 3.3 Diffusion de neutrons en présence d'une source.

Dans cet exercice, on s'intéresse à la diffusion des neutrons dans un barreau cylindrique de plutonium d'axe  $Oz$ , compris entre  $z = 0$  et  $z = L$ , et de section droite  $S$ . On souhaite déterminer l'évolution du nombre de neutrons par unité de volume  $n(z, t)$  sachant que :

1. les neutrons diffusent dans le barreau d'uranium avec un coefficient de diffusion  $D = 22\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
2. des neutrons sont produits au sein même du barreau par réaction nucléaire. Dans un volume  $d\tau$  du barreau,  $\delta^2 N_{\text{neutrons crees}}$  neutrons sont créés par unité de  $dt$  :  $\delta^2 N_{\text{neutrons crees}} = \alpha n(M, t) d\tau dt$  avec  $\alpha = 3,5.10^4 \text{s}^{-1}$ .
3. Les extrémités  $z = 0$  et  $z = L$  du barreau sont au contact d'un matériau absorbant, de telle sorte que  $n(z = 0, t) = n(z = L, t) = 0 \forall t$

1. Montrer que  $n(z, t)$  est solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + \alpha n$$

2. On suppose le régime stationnaire atteint. Déterminer  $n(z)$  à une constante multiplicative près sachant que  $n$  ne s'annule pas dans le barreau

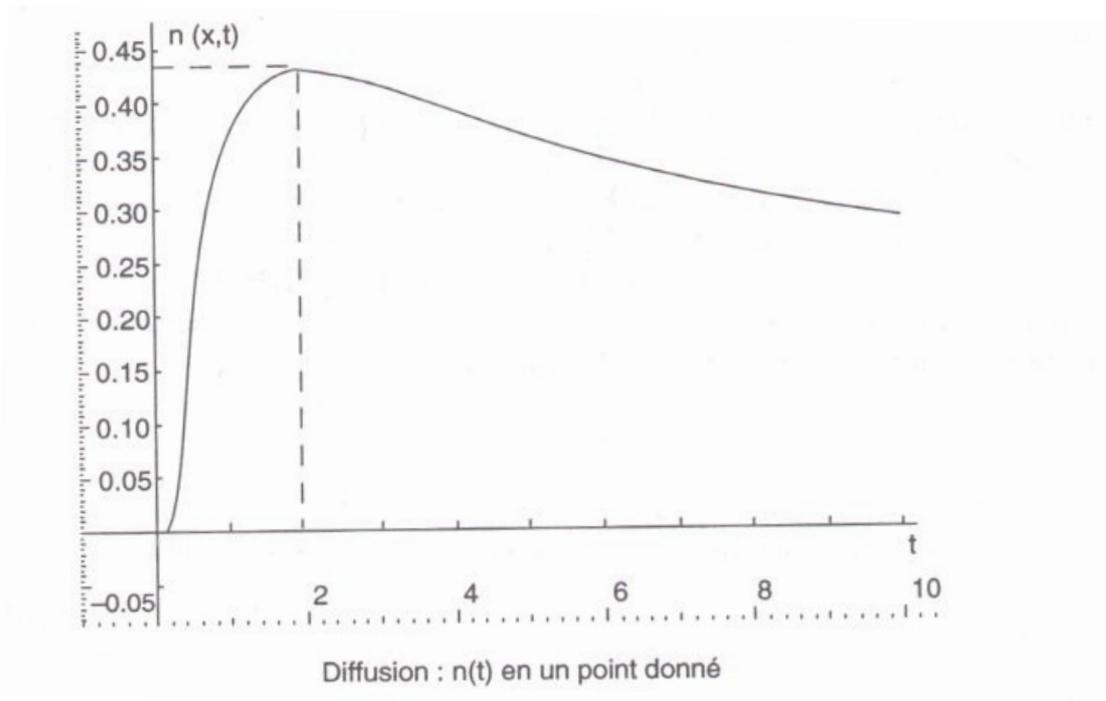


FIGURE 3.2 – Solution autosimilaire de l'équation de diffusion à  $x$  donnée en fonction du temps

3. En déduire alors que ce régime n'est possible que si  $L = L_{critique}$
4. On cherche maintenant des solutions sous forme d'onde stationnaire  $n(z, t) = f(z)g(t)$ . Trouver les équations dont  $f$  et  $g$  sont solutions.
5. Montrer que  $n$  diverge si  $L > L_{critique}$ . Commenter.

*Commentaire : D'après oral et écrit Mines et CCP. Un problème très classique avec un terme de source. La recherche de la solution en régime stationnaire est simple mais il faut penser à exploiter toutes les données de l'énoncé; la recherche en solution sous forme onde stationnaire est plus riche, il faut spontanément penser à la séparation des variables. La notion de masse critique est essentielle pour les réactions nucléaires.*

### 3.4 Le marcheur ivre et la diffusion.

Un homme ivre (de bonheur) se situe à  $t=0$  en  $x=0$ . Dans chaque intervalle de temps  $dt$ , il fait un pas (pour maintenir son équilibre incertain) de longueur  $a$  soit vers la droite avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ , soit vers la gauche avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ . (Le marcheur ne se déplace que suivant  $x$  et occupe donc une abscisse  $x_n = n.a$ )

On appelle  $p(x_n, t)$  la probabilité que le marcheur se trouve en  $x_n$  à l'instant  $t$  et le but de ce problème est d'étudier la loi d'évolution de cette probabilité.

1. Justifier que  $p(x_n, t + dt) = \frac{1}{2}p(x_{n-1}, t) + \frac{1}{2}p(x_{n+1}, t)$

2. En faisant l'approximation des milieux continus, montrer que la probabilité  $p(x,t)$  obéit à une équation de diffusion.
3. Après une durée  $\tau$ , à quelle distance de l'origine se trouvera "en moyenne" le marcheur ivre ?
4. La personne retrouve un  $\epsilon$  de lucidité et donc il fait un pas (pour maintenir son équilibre incertain) de longueur  $a$  soit vers la droite avec une probabilité  $\frac{1}{2} + \epsilon$ , soit vers la gauche avec une probabilité  $\frac{1}{2} - \epsilon$ . Trouver la nouvelle équation dont est solution  $p(x,t)$  Commenter.

*Commentaire : D'après oral et ADS. Le phénomène de marche au hasard doit être associé dans votre esprit au phénomène de diffusion. Ce modèle présenté ici de manière amusante est un modèle qui peut être utilisé pour décrire avec précision la diffusion de molécules à la surface d'un solide (ou sur des sites d'adsorption). Il peut être généralisé à deux dimension et même à trois dimensions dans le cas de pas de direction quelconque. La dernière question invite à la réflexion entre phénomène de diffusion et phénomène de propagation.*

### 3.5 Purification du silicium

Le silicium est l'élément essentiel de tous les composants électroniques. Il doit être purifié pour être utilisé dans l'électronique.

L'idée de la purification est simple : on chauffe une partie du silicium (par induction) et les impuretés sont plus solubles dans le silicium chaud que dans le silicium froid. Ainsi on déplace les impuretés vers une extrémité du barreau de silicium et on en sectionne une partie. On recommence l'opération jusqu'à obtenir la pureté souhaitée.

On s'intéresse à un barreau de silicium cylindrique de section droite  $S$  et d'axe  $Oz$ .

1. Faire une brève recherche internet sur le silicium, son utilisation et sa purification.
2. On se place pour l'étude dans le référentiel  $R'$  lié au système de chauffage (qui se translate selon  $z$  à vitesse constante.) Le barreau se déplace donc dans le référentiel  $R'$ .  
Du fait du chauffage, il existe un gradient de température constant  $\vec{grad}T = -\alpha$ . Exprimez  $T(z')$  sachant que  $T(z' = 0) = T_0$
3. On note  $[I]_s$  et  $[I]_l$  la concentration des impuretés respectivement dans la phase solide (supposée constante et uniforme) et liquide (qui dépendra de  $z'$ ).

La température de fusion est diminuée par la présence des impuretés et on dispose de la formule approchée  $T_F = T_{F_{pur}} - a[I]_l$

Par ailleurs il existe un équilibre chimique entre les impuretés dans la phase solide et la phase liquide  $I_s = I_l$  de constante d'équilibre chimique  $K$ .

Déterminer  $[I]_l$  en fonction de  $K$  et  $[I]_s$ .

Montrer que la côte  $z'_F$  où débute la fusion du silicium s'écrit  $z'_F = \frac{T_0 - T_{F_{pur}} + aK[I]_s}{\alpha}$  Cette abscisse étant constante, on la prendra comme nouvelle origine  $z'=0$ .

Les impuretés diffusent dans la phase liquide du silicium (coefficient de diffusion  $D$ ) mais pas dans la phase solide où on suppose leur concentration  $[I]_s$  constante.

4. Rappeler sans démonstration l'équation de diffusion tridimensionnelle.

Ici, le fait est qu'il y a un mouvement apparent du silicium dans le référentiel R' (mouvement d'ensemble) il faut donc traiter la dérivée temporelle de l'équation de diffusion comme une dérivée particulière  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{D}{Dt}$ .

Transformer l'équation de diffusion.

Montrer qu'en régime stationnaire,  $[I]_l$  est solution de l'équation

$$\frac{d[I]_l}{dz'} = \delta \frac{d^2[I]_l}{dz'^2}$$

On donnera l'expression de  $\delta$  en fonction de D le coefficient de diffusion et de v la vitesse de translation et on justifiera sa dimension par deux méthodes différentes.

5. En déduire l'expression de  $[I]_l(z')$  en fonction de K,  $\delta$  et  $[I](\infty) = I(z' = -\infty)$
6. Justifier qualitativement que  $[I](\infty) = I(z' = -\infty) < [I]_s$
7. Tracer l'allure de  $[I]_l(z')$
8. Quelle longueur du barreau de silicium faut il ôter pour éliminer un maximum d'impureté? Discuter.

*Commentaire : D'après écrit Centrale. Un exercice peu difficile mais à l'énoncé un peu déroutant. Il faut se laisser guider par l'énoncé. L'utilisation d'une dérivée particulière est intéressante car généralisable. Et l'application est au finale importante comme votre recherche internet l'aura révélé!*

# Chapitre 4

## Diffusion thermique.

### 4.1 Diffusion de la chaleur dans une barre et ARQS.

Une barre de rayon  $r$ , de longueur  $L$ , de conductivité thermique  $\lambda$ , relie deux "thermostats" de grand volume  $V$  identique, respectivement à la température  $T_1$  en  $x=0$  et  $T_2$  à l'extrémité  $x=L$  du tube (les thermostats sont supposés à une température uniforme). La barre ainsi que les thermostats sont dans le même matériau : de masse volumique  $\mu$ , de capacité calorifique massique  $c$ .

1. Redémontrer l'équation de la chaleur (équation de diffusion) dans la barre en supposant la diffusion unidimensionnelle selon  $x$ .
2. Après avoir rappelé la loi phénoménologique de Fourier, retrouver l'équation de diffusion unidimensionnelle selon  $x$ .
3. On suppose dans cette question le régime stationnaire dans le tube.
  - (a) Simplifier l'équation de diffusion.
  - (b) Etablir l'expression de  $T(x)$ .
  - (c) En déduire alors  $\vec{j}_Q$ . Commenter.
  - (d) Calculer  $\delta Q(x)$  la chaleur qui traverse la section  $S$  d'abscisse  $x$  de la barre. Cette grandeur dépend-elle de  $x$ ?
  - (e) Justifier alors que le régime ne puisse être strictement stationnaire.
4. On souhaite valider les résultats de la question précédente en se plaçant en régime quasi stationnaire. La température des thermostats dépend donc du temps  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$ .
  - (a) Trouver les deux équations couplées liant  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  (uniformes)
  - (b) Les résoudre en posant  $\Sigma(t) = T_1(t) + T_2(t)$  et  $\Delta(t) = T_1(t) - T_2(t)$
  - (c) Valider alors l'ARQS. Commenter le résultat.

*Commentaire : D'après oral CCP. Un problème classique, très proche du cours. La démonstration de l'équation de diffusion est demandée à une dimension. L'étude en régime stationnaire est simple, la validation de l'ARQS se fait en comparant le temps de diffusion dans la barre et le temps caractéristique des variations de  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$ , qui s'obtient en faisant le bilan énergétique ou premier principe dans chacune des barres. On retrouve l'idée qu'un bon thermostat est de volume très grand.*

## 4.2 Le double vitrage.

On souhaite comparer les performances du double vitrage à celle du simple vitrage. Un double vitrage est une vitre de type 4-16-4 : 4 mm de verre, 16mm de gaz, 4mm de verre. Un vitrage simple est un verre de 8mm d'épaisseur. Pour comparer les performances énergétiques des deux fenêtres de  $1m^2$ , la maison est supposée à  $20^\circ C$  et l'extérieur à  $5^\circ C$ .

1. Rappeler l'ordre de grandeur de la conductivité thermique du verre et de l'air.
2. Rappeler le lien entre l'écart de température, la résistance thermique (avec son expression), et le flux de chaleur (dont on rappellera l'unité).
3. Calculer la puissance que doit fournir le chauffage pour compenser les pertes dans les deux cas. Comparer à la chaleur de 40W dégagé par un homme présent dans la pièce.

*Commentaire : D'après oral CCP, centrale, extrait écrit. Un problème très classique de résistance thermique et leur association. Il ne s'agit que d'une application numérique mais qui révèle le progrès que permet le double vitrage en terme d'isolation.*

## 4.3 Survivre dans un igloo.

Pour survivre au froid de la nuit, il est possible de se constituer un abris de glace : un igloo qui protège du froid. Sachant qu'un homme dégage une puissance de  $P = 40W$ , estimer quelle doit être l'épaisseur de glace ( $\lambda = 5.10^{-2}W.K^{-1}.m^{-1}$ ) pour maintenir une température de  $10^\circ C$  à l'intérieur sachant que la température extérieure est de  $-20^\circ C$ . (On prendra le rayon de l'igloo  $R \simeq 1m$ ).

*Commentaire : D'après oral. Un petit exercice à traiter en ordre de grandeur mais qui n'en demeure pas moins intéressant sur le régime permanent.*

## 4.4 Onde thermique et température du sol.

On souhaite étudier les variations de températures dans le sol (en fonction du temps et de la profondeur) dues aux fluctuations de températures de l'air (journalière et saisonnière). Le sol est pris à l'abscisse  $z = 0$ . La terre occupe l'espace  $z < 0$  et est à la température  $T(z, t)$ , il possède (couche arrable) une masse volumique  $\mu = 2700kg.m^{-3}$ , une capacité calorifique  $c = 1000J.kg^{-1}.K^{-1}$  et une conductivité  $\lambda = 2,7W.m^{-1}.K^{-1}$ . L'air lui à la température  $T(t) = T_0 + T_1 \cos(\omega_1.t) + T_2 \cos(\omega_2.t)$  avec  $\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1$  jour,  $\tau_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 1$  an,  $T_0 \simeq T_1 \simeq T_2 \simeq 10^\circ C$ .

1. En appliquant le premier principe un élément de volume  $V$  quelconque du sol, redémontrer que  $D\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$
2. On cherche des solutions à cette équation de la forme pseudo onde plane progressive harmonique, OPPH\* :  $T(x, t) = Re(\underline{T}(x, t))$  avec  $\underline{T}(x, t) = \underline{T}_M \cdot \exp(j\omega t + jkz)$  et  $k$  complexe (en toute rigueur il devrait se noter  $\underline{k}$ ). Justifier la forme de l'onde et le choix de  $\omega$  réel.
3. Trouver la relation de dispersion de cette onde thermique dans le sol.
4. Calculer alors  $k'$  et  $k''$ .

5. Donner l'expression de  $T(x, t)$ . Interpréter.
6. En tenant compte des Conditions aux Limites sur le sol, en déduire alors l'expression complète de la température  $T(x, t)$  dans le sol.
7. Estimer alors la distance caractéristiques sur laquelle les fluctuations journalières de température puis annuelles se font sentir.

*Commentaire : D'après écrit Mines. Un problème classique, qui se rapproche de la physique des ondes et qui permet de faire une analogie forte avec l'effet de peau vu dans les métaux. La recherche d'une solution par superposition est simple mais permet de traiter un aspect peu étudié en physique des ondes sur un cas très simple.*

## 4.5 Gel d'un lac

Un lac de surface  $S$  gèle lorsque l'air au dessus de celui ci est à une température  $T_a < 0^\circ C$ . Une couche de glace d'épaisseur  $e(x)$  apparaît. L'eau liquide du lac est, elle, à  $T_e = 0^\circ C$ . L'interface air glace se situe en  $x = 0$  et l'interface eau glace en  $x = e(x)$ , l'axe des  $x$  est donc selon la verticale descendante.

Données : chaleur latente de fusion de la glace  $l_F = 330 kJ.kg^{-1}$  à  $T_F = 273^\circ K$ .

capacité calorifique de la glace  $c_g = 4,06 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$ , conductivité thermique  $\lambda_g = 5.10^{-2} W.K^{-1}.m^{-1}$  et masse volumique  $\mu_g = 990 kg.m^{-3}$

capacité calorifique de l'eau liquide  $c_l = 4,18 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$  et sa masse volumique  $\mu_l = 1000 kg.m^{-3}$

Dans une première partie, on suppose que l'air impose sa température  $T_a$  à la surface de la glace :  $T(z = 0, t) = T_a$

1. En régime permanent, établir l'expression de  $T(x)$  dans la glace et exprimer le flux thermique  $\phi$  traversant la glace
2. En faisant un bilan thermodynamique sur l'épaisseur  $de$  d'eau qui gèle pendant l'intervalle de temps  $dt$ , montrer que  $e \cdot \frac{de}{dt} = \alpha(T_F - T_a)$  avec  $\alpha$  un coefficient à déterminer en fonction des données de l'énoncé.
3. Etablir la loi d'évolution de croissance de la glace  $e(t)$
4. En déduire alors un temps caractéristique des variations de  $e(t)$ .
5. Discuter la validité de l'ARQS dans la glace.

Dans cette partie , on souhaite adopter un modèle plus réaliste : l'air au dessus de la glace ne parvient pas à imposer sa température et cet air est rarement au repos. Il convient donc de prendre en compte le flux conducto-convectif, modélisé par la loi de Newton

$$\phi_{cc} = hS(T_s - T_a)$$

où  $h$  est un coefficient (dépendant de la vitesse du vent),  $T_s$  la température de surface de la glace et  $T_a$  la température de l'air.<sup>1</sup>

1. La convection augmente donc le flux de chaleur pris à un objet : on perd plus de chaleur dans le vent que lorsqu'il n'y a pas de vent.

1. Justifier par une phrase la continuité du flux thermique en  $z=0$
2. En déduire que  $T_s = \frac{T_a + (\lambda/eh)T_F}{1 + (\lambda/eh)}$
3. Commenter alors le modèle de la première partie.
4. Etablir la nouvelle équation dont  $e(t)$  est solution.

*Commentaire : D'après écrit. Un problème intéressant et de bon niveau qui fait intervenir de nombreux domaines de la physique : diffusion de la chaleur en régime permanent, premier principe et changement d'état, première rencontre avec le flux conducto-convectif. Si les bilans sont clairs (les idées physiques des bilans) alors l'exercice est sans grande difficulté mais interrogez vous sur le sens de chaque bilan écrit.*

## 4.6 Refroidissement d'une ailette.

Pour évacuer de la chaleur d'une pièce métallique vers l'atmosphère extérieur, des "ailettes" sont placées sur la pièce pour augmenter la surface de contact entre la pièce et l'air. Les ailettes sont de conductivité  $\lambda$ , de masse volumique  $\rho$  et de capacité calorifique massique  $c$ .

Une ailette est donc un parallélépipède a.a.c (selon  $x, y, z$ ) avec  $c < a$ , tel que le petit côté  $ac$  est collé sur la pièce métallique à refroidir en  $x=0$ .

Cette plaque de conductivité thermique  $\lambda$  est supposée posséder une température  $T(x)$  ne dépendant que de  $x$ , pas du temps (régime stationnaire). L'atmosphère, elle, est supposée à la température  $T_a$  et on tient dans les **pertes** de chaleur à travers une surface  $dS$  de l'ailette avec l'atmosphère pendant  $dt$  du le flux conducto-convectif, modélisé par la loi de Newton

$$\delta^2 Q_{cc} = hS(T(x) - T_a)dSdt$$

où  $h$  est un coefficient (dépendant de la vitesse du vent),  $T(x)$  la température de l'ailette à l'abscisse  $x$  et  $T_a$  la température de l'air.

1. En faisant un bilan énergétique sur une tranche  $dx$  de l'ailette, montrer que  $\delta^2 \frac{d^2 T}{dx^2} + T = T_a$  avec  $\delta$  à exprimer en fonction des données.
2. Simplifier cette expression en supposant  $c \ll a$
3. Vérifier avec des ordres de grandeur raisonnable que  $\delta \ll a$ .
4. On suppose donc la condition  $\delta \ll a$  vérifiée, ce qui permet d'imaginer l'ailette comme infini et donc  $T(x = \infty) = T_a$ . Etablir  $T(x)$  Commenter.
5. Calculer le flux thermique total  $\phi$  évacué par l'ailette.
6. Evaluer le flux conducto convectif en l'absence d'ailette  $\phi_{cc \text{ brut}}$ .
7. Définir alors l'efficacité de l'ailette. Commenter.

*Commentaire : D'après oral Mines et ADS. Un exercice très classique sur les ailettes, que vous pouvez observer sur certains transistors de puissance et sur les alimentations stabilisées. Pour refroidir, il faut augmenter la surface de contact entre l'atmosphère et le milieu. Toute la physique se fait à la première question : poser proprement (avec des mots) le bilan. La suite n'est qu'une résolution intelligente et une discussion, interprétation des résultats sans difficulté.*

## 4.7 Fusible.

Un fusible électrique est fil électrique (cylindrique) de longueur  $L$  et de rayon  $a \ll L$ , de conductivité électrique  $\sigma$ , de conductivité thermique  $\lambda$ , de masse volumique  $\mu$ . Le fil doit fondre si la densité de courant  $\vec{j} = j\vec{u}_z$  uniforme dépasse une certaine valeur.

On souhaite donc étudier la température dans le fil en fonction du courant qui le traverse. La répartition de température est supposée en régime stationnaire mais radiale de telle sorte que  $T(r)$ .

1. En faisant un bilan énergétique sur la couronne comprise entre  $r$  et  $r+dr$ , montrer que  $\frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{j^2}{\sigma} = 0$ .
2. En déduire  $T(r)$  à deux constantes multiplicatives près.
3. Par un argument physique, éliminer une de ces deux constantes.
4. En supposant que l'atmosphère impose  $T(r = a) = T_0$ , déterminer complètement  $T(r)$ .
5. Sachant que la température de fusion du métal est  $T_F$ , déterminer le rayon  $a_0$  du fusible permettant de faire fondre le fusible si  $I > I_0$
6. En réalité, l'atmosphère ne peut imposer sa température au fusible mais il faut prendre en compte le flux conducto-convectif, modélisé par la loi de Newton  $\phi_{cc} = h \cdot 2\pi a L \cdot (T(a) - T_0)$  ( $ah \ll \lambda$ ). Calculer le nouveau rayon  $a_0$  du fusible permettant de faire fondre le fusible si  $I > I_0$

*Commentaire : D'après écrit et oraux X. Un exercice un peu plus difficile dans la mesure, du fait de la symétrie non pas cartésienne comme dans les exercices précédents mais cylindrique. Néanmoins, une fois l'équation bilan correctement établie, l'exercice n'est pas difficile. Les fusibles tendent aujourd'hui à disparaître (mais pas cet exercice...) au profit de dispositifs "moins dangereux" les différentiels, qui ne fondent pas et qui ont un temps de réponse plus court.*