Exercices de thermodynamique

⋆ ⋆ ⋆

PSI* - Collège Stanislas

Philippe Ribière

Année Scolaire 2014-2015

Chapitre 1

Thermodynamique.

1.1 Etude des cinq transformations modèles.

Objectifs de l'exercice de cours :

1. *A partir des données de l'énoncé, savoir identifier l'une des 5 transformations modèles de la thermodynamique.*
2. *Savoir réaliser un bilan énergétique sur chacune des 5 transformations modèles.*
3. *Commenter le signe des échanges énergétiques.*
4. *Savoir réaliser un bilan d'entropie sur chacune des 5 transformations modèles.*
5. *Commenter la réversibilité de la transformation.*

On s'intéresse à un système constitué du piston (de capacité calorifique négligeable, de masse négligeable) et de l'air contenu dans le piston, assimilé à un gaz parfait diatomique. Dans l'état initial, l'air est à la température de $T_0 = 300K$, occupe un volume de $V_0 = 10L$ et est à la pression $P_0 = 1$bar.
Les questions de cet exercice sont indépendantes et dans chacune, l'état initial est l'état décrit ci dessus.

1. Le piston est supposé aux parois diathermes et possède une paroi mobile de masse négligeable, il est placé dans un milieu extérieur, assimilé à un thermostat à la température T_e=600K et à la pression $P_e = 1$ bar invariante. Déterminer p_1, T_1 et V_1 à l'état final. Calculer le travail $W_{0\to1}$ et $Q_{0\to1}$. Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.
2. Le piston est supposé aux parois diathermes et est indéformable, il est placé dans un milieu extérieur, assimilé à un thermostat à la température T_e=600K et à la pression $P_e = 1bar$ invariante. Déterminer p_2, T_2 et V_2 à l'état final. Calculer le travail $W_{0\to2}$ et $Q_{0\to2}$. Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.
3. Le piston est supposé aux parois diathermes et possède une paroi mobile, un opérateur déplace très lentement cette paroi mobile de telle manière à ce que le volume ait été divisé par 2, il est placé dans un milieu extérieur, assimilé à un thermostat à la température T_e=300K. Déterminer

p_3, T_3 et V_3 à l'état final. Calculer le travail $W_{0\to3}$ et $Q_{0\to3}$. Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.

4. Le piston est supposé aux parois athermales et possède une paroi mobile, un opérateur déplace très lentement cette paroi mobile de telle manière à ce que le volume ait été divisé par 2, il est placé dans un milieu extérieur, assimilé à un thermostat à la température T_e=300K. Déterminer p_4, T_4 et V_4 à l'état final. Calculer le travail $W_{0\to4}$ et $Q_{0\to4}$. Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.
5. Le piston est supposé calorifugé et possède une paroi mobile, un opérateur déplace brutalement cette paroi mobile (en laissant tomber une masse dessus par exemple) de telle manière à ce que le volume ait été divisé par 2. Déterminer p_5, T_5 et V_5 à l'état final. Calculer le travail $W_{0\to5}$ et $Q_{0\to5}$. Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.
6. Le piston est supposé calorifugé et est indéformable, il est placé dans un milieu extérieur, assimilé à un thermostat à la température T_e=600K et à la pression $P_e = 1bar$ invariante. Déterminer p_6 T_6 et V_6 à l'état final. Calculer le travail $W_{0\to6}$ et $Q_{0\to6}$. Faire le bilan d'entropie sur cette transformation.

Commentaires :

1. *La lecture de l'énoncé est primordiale en thermodynamique : il faut savoir identifier d'une part la nature du système (GPM ou GPD ou liquide ou solide) et d'autre part les caractéristiques des parois du système et de la transformation.*
2. *Il faut être conscient qu'une transformation isotherme nécessite un échange de chaleur et qu'au contraire une transformation adiabatique conduit nécessairement à une évolution de température.*
3. *La transformation monobare est toujours un peu plus difficile à calculer car il faut résoudre un système de deux équations à deux inconnues.*
4. *Le second principe permet de déterminer par le calcul de l'entropie créée si la transformation est possible et réversible ($S_C = 0$), possible et irréversible ($S_C > 0$) ou impossible ($S_C < 0$) mais cela peut aussi se commenter après calcul à l'aide du sens physique.*

1.2 Suite de transformation sur l'air.

L'air est comprimé de façon isotherme de la pression $p_0 = 1atm$ (état A) à la pression $p_1 = 20atm$ (état B) à la température $T_0 = 273K$.
Le gaz est ensuite détendu adiabatiquement de façon réversible jusqu'à la pression $p_0 = 1atm$ (état C).

1. Calculer la température finale T_1 après cette double opération $A \to B \to C$.
2. On recommence la succession des deux opérations précédentes partant du gaz à la température T_1. Calculer la température T_2.

3. Trouver la formule générale de la température T_n du gaz, atteinte à la fin de la double opération successive décrite précédemment.
4. Etudier les échanges énergétiques d'une mole de gaz, au cours de la n^{ieme} double transformation en fonction de γ, T_0, p_0, p_1 et n.
5. La transformation est elle réversible ?
6. A l'aide d'une recherche internet, dire en quelques lignes quel est l'intérêt d'une telle suite de transformation ?

Commentaire : D'après oral. Un exercice de thermodynamique tout à fait standard. Il faut bien étudier séparément les deux transformations.

1.3 Mesure expérimentale de la capacité calorifique du calorimètre.

L'expérience suivante a été réalisée :
Dans un calorimètre contenant initialement une masse $m_1 = 326g \pm 1g$ d'eau liquide, a été introduite une masse $m_2 = 132g \pm 1g$ d'eau liquide à $T_2 = 72{,}5°C \pm 0{,}5°C$.
Un relevé de température de l'eau dans le calorimètre au cours du temps (une mesure toutes les 30 secondes) conduit au graphique suivant :
Commenter la courbe expérimentale.

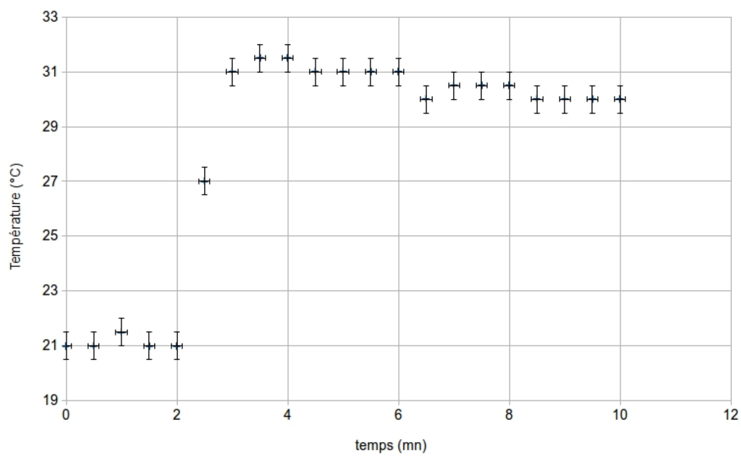

Figure 1.1 – Courbe de température dans le calorimètre en fonction du temps.

Comparer le résultat expérimental avec la valeur de la température atteinte avec un calorimètre idéal. Estimer à partir de cette courbe la capacité calorifique du calorimètre et sa masse d'eau équivalente.

Commentaire : Un exercice rédigé de manière plus moderne par son approche et par son questionnement, qui reprend des éléments vus en TP sur la calorimétrie.

1.4 Cycle thermodynamique dans un piston.

Un piston, dont la partie mobile est de masse négligeable, de section $S = 0{,}1m^2$, contient initialement un gaz parfait monoatomique en équilibre au contact de l'atmopshère, à la température $T_0 = 290K$ et $P_0 = 1$ bar. Le piston est par la suite calorifugé.

1. Un opérateur extérieur réalise une transformation très lente pour amener la pression à $P_1 = 2$ bar. Déterminer complètement l'état d'équilibre 1 ainsi que les échanges énergétiques lors de cette première transformation. Que dire du bilan d'entropie ?
2. L'opérateur, tout en maintenant la pression extérieure à 2 bar, supprime les éléments qui calorugeaient le piston. Déterminer complètement l'état d'équilibre 2 ainsi que les échanges énergétiques lors de cette seconde transformation. La transformation est-elle réversible ?
3. L'opérateur modifie alors très très lentement le volume pour le ramener à sa valeur initiale V_0. Déterminer complètement l'état d'équilibre 3 ainsi que les échanges énergétiques lors de cette première transformation. La transformation est-elle réversible ?
4. Représenter ces trois transformations sur un diagramme de Clapeyron. Calculer le travail total et la chaleur totale échangée. Calculer l'entropie totale échangée.

Commentaire : D'après écrit et oral. Un exercice classique de la thermodynamique, complet avec bilan d'énergie et bilan d'entropie. Il faut être en mesure de faire cet exercice avec ses applications numériques rapidement (et sans se tromper) .

1.5 Gaz dans un piston de masse non négligeable.

Un cylindre C de section S=10 cm^2 contient de l'air sec, à la température $T = 7°C$. Il est fermé par un piston mobile, sans frottement, de masse $M = 5$ kg, au contact de l'atmosphère à la pression $p_0 = 10^5 Pa$. L'air occupe une hauteur $h = 35cm$. On place sur le piston une surcharge $m = 10kg$. ($\gamma = 1{,}4$, $g = 10m.s^{-2}$)

1. Calculer la pression avant que la surcharge ne soit posée sur le piston.
2. Calculer le déplacement immédiat du piston.
3. Calculer la variation de température de l'air.
4. Déterminer la position finale du piston lorsque l'équilibre thermique avec l'extérieur est rétabli.

Commentaire : Un exercice riche : d'une part, le piston n'est pas de masse négligeable, il faut donc définir avec soin la pression extérieure ; d'autre part, comme le premier état d'équilibre est obtenue par une transformation "rapide" : cela signifie que les échanges de chaleur qui sont lents n'ont pas le temps de se faire et que donc on peut supposer la transformation adiabatique même si le piston n'est pas calorifugé (il y a donc une évolution de la température comme le suggère la question 3 suite à cette première transformation) .

1.6 Cycle de Carnot.

Objectifs de l'exercice de cours :

1. *Etudier un cycle de manière globale.*
2. *Etudier un cycle transformation par transformation.*
3. *Exploiter le diagramme de Clapeyron Watt.*
4. *Commenter la réversibilité de la transformation.*

Le cycle de Carnot se compose de quatre transformations :
Deux évolutions isothermes réversibles AB et CD, au contact des sources froides à 20°C ($T_1 = 293$°K) et chaudes à 600°C ($T_2 = 873$°K). Deux évolutions adiabatiques réversible BC et DA une compression et une détente.
On suppose aussi que le fluide est invariant (la transformation chimique n'affecte pas ses propriétés) et bien décrit par un gaz parfait avec $\gamma = 1{,}4$. On prendra R =8,31 S.I.

1. Représenter le cycle moteur sur le diagramme de Clapeyron Watt.
2. Calculer le rendement de ce moteur de Carnot.
3. Sachant que l'air est initialement à la température $T_A = T_1$, à la pression $P_A = 1000$hPa, et que le volume du piston est V_A=1000cm^3, et que dans l'état C, la température est $T_C = T_2$ (pour avoir une évolution isotherme réversible) et P_C=60000hPa calculer les caractéristiques de chaque état, ainsi que le travail et la chaleur lors de chaque transformation. (Vérifier la cohérence de vos résultats.)
4. Pourquoi le cycle de Carnot n'est il pas utilisé dans les moteurs usuels ? Par ailleurs, commenter les valeurs obtenues et les éventuelles limitations ?
5. Comment fabriquer un réfrigérateur de Carnot ? Dessiner son cycle sur le diagramme de Clapeyron.

`Réponse:` $n = 0{,}041 mol$ `2.` $\eta = 0{,}66$ `3.` $T_B = 293K$`,` $V_B = 765cm^3$ `et` $P_B = 1{,}3bar$ `(à partir de l'état C)` $W_{A\to B} = -Q_{A\to B} = 26J$ $V_C = 50cm^3$ $W_{B\to C} = 494J$ $V_D = 54{,}7cm^3$ `et` $P_D = 54{,}5bar$ `(à partir de A)` $W_{C\to D} = -Q_{C\to D} = -864J$ $W_{D\to A} = -59{,}5J$ $W_{tot} = -Q_{tot} = -838J$
Commentaire : Cet exercice de concours est très classique. Une étude globale du cycle est à faire spontanément. Il est alors souvent plus aisé de se ramener au simple calcul de Q_C et Q_F. Les cycles des machines thermiques sont composés des 5 transformations modèles. Chaque transformation doit être étudiée séparément et les informations doivent ensuite être regroupées. Vous devez aussi connaître les limites du cycle de Carnot et mémoriser quelques ordres de grandeur.
Je vous invite à visiter (encore une fois) le site de l'université de Nantes qui est riche en applet java très démonstrative.

1.7 Cycle d'Otto.

Un moteur à explosion fonctionne sur le cycle d'Otto, ou Beau de Rochas modélisé ici par :

— Admission d'un volume V_1 du mélange air-essence, à $P_1 = P_0$ et $T_1 = 350\ K$.
— Compression isentropique (adiabatique réversible) jusqu'à l'état (P_2, T_2, V_2).
— Explosion (et donc compression) du mélange qui se retrouve dans l'état $(P_2', T_2', V_2' = V_2)$.
— Détente isentropique jusqu'à l'état $(P_3, T_3, V_3 = V_1)$.
— Ouverture de la soupape d'échappement, le mélange revient à l'état 1 avant d'être rejeté dans l'atmosphère. Le gaz subit d'abord une détente isochore avant d'être relâché dans l'atmosphère.

On suppose aussi que le fluide est invariant (la transformation chimique n'affecte pas ces propriétés) et bien décrit par un gaz parfait avec $\gamma = 1{,}35$.
Données :
$V_2 - V_1 = 1124\ cm^3$
$\alpha = \frac{V_1}{V_2} = 9.4$
masse volumique de l'essence $\mu = 720\ kg.m^{-3}$.
pouvoir thermique de l'essence $K = 48\ kJ.g^{-1}$.
consommation au 100 km $c = 5{,}9$ L à $V = 120\ km.h^{-1}$ ($N_{tours} = 5600\ tr/mn$).

1. Tracer le cycle sur un diagramme de Clapeyron. Faire un premier bilan sur chacune des transformations.
2. Pourquoi parle-t-on de moteur quatre temps ? Quel est l'intérêt d'avoir 8 cylindres ?
3. Calculer le rendement du moteur η en fonction de T_1, T_2, T_2' et T_3, puis en fonction de α et γ.
4. Montrer la puissance du moteur P s'écrit en fonction de $c,\ V,\ K,\ \mu,\ \eta$ $P = 10^{-5}/3600.c.V.\mu.K.\eta$.
5. Calculer toutes les températures et les pressions en étudiant chacune des transformations.
6. Calculer le rendement du moteur, le rendement de Carnot, commenter.
7. Commenter le modèle adopté pour la transformation.

`Réponse:` $V_1 = 1258cm^3$ `3.` $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_3}{T_2' - T_2} = 1 - \alpha^{1-\gamma} = 0{,}54$ `4.` $P = 37kW$ `5.` $T_2 = T_1\alpha^{\gamma-1} = 767K$ $P_2 = P_1\alpha^\gamma = 20{,}6\ bar$ $P_2' = 58{,}7\ bar$ $T_3 = 977K$ `et` $P_3 = 2{,}85\ bar$`.` `6.` $\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0{,}84$
Commentaire : Cet exercice, extrait de concours, propose l'étude du cycle du moteur essence. Sans connaître le cycle, vous devez être en mesure d'identifier les quatre temps du moteur, qui n'ont pas de lien direct avec les quatre transformations thermodynamiques et aussi connaître la différence entre le moteur essence et le moteur diesel.

1.8 Climatiseur.

On souhaite réaliser la climatisation d'un local afin de maintenir sa température à la valeur T_1=300K alors que l'extérieur est à la température de T_2=315K. On utilise pour cela une machine thermique, fonctionnant avec n moles d'un GP de capacité calorifique molaire à pression constant $C_{pm} = 30J.K^{-1}.mol^{-1}$.
Au cours de la transformation, le fluide reçoit les transferts énergétiques suivants : Q_1 de la source froide, Q_2 de la source chaude et W un travail mécanique.

1. Préciser le signe de chacun des transferts énergétiques.

2. Supposons que le climatiseur fonctionne sur un cycle de Carnot. Représenter le cycle de Carnot sur le diagramme de Watt P=f(V). Calculer l'efficacité de la climatisation.
3. Dans la réalité, le fluide décrit le cycle suivant :
   A à B, compression adiabatique réversible de T_1 à $T_1' = 350K$
   B à C, refroidissement isobare de T_1' à T_2
   C à D, détente adiabatique réversible de T_2 à T_2'
   D à A, échauffement isobare de T_2' à T_1

   (a) Représenter le cycle sur le diagramme de Watt P=f(V).
   (b) Exprimer les variations d'entropie du fluide sur chaque transformation en fonction des seules données de l'énoncé. En déduire que $T_2' = \frac{T_1.T_2}{T_1'}$
   (c) Calculer Q_C, Q_F et W (A.N. pour n=10)
   (d) Calculer l'efficacité de ce climatiseur. Commenter.

Commentaire : Cet exercice, extrait de concours, se concentre sur le fonctionnement d'un climatiseur. Il est bien posé et les calculs doivent être faits rapidement (et toujours sans erreur).

1.9 Le moteur automobile.

1. Le moteur d'automobile comporte 4 cylindres fonctionnant selon un cycle à 4 temps. En régime permanent, la puissance développée au niveau des pistons est de 40kW. Le rendement du moteur est r=0,35. Déterminer en kilocalories par seconde la quantité de chaleur $\dot{Q}_1$ fournie par la combustion de l'essence et la quantité de chaleur $\dot{Q}_2$ évacuée par le système de refroidissement.
2. L'essence utilisée ayant un pouvoir calorifique de 11500kcal.kg^{-1} et sa densité étant de 0,72, trouver la consommation du moteur en litre par heure. (1 Cal=1 kcal=4,18kJ).

Commentaire : Cet exercice est en réalité une simple application numérique. Pensez à vous aider de l'analyse dimensionnelle pour trouver les bonnes formules.

1.10 Variation infinitésimale de température dans un frigo.

Pour étudier les échanges de chaleur avec le milieu extérieur et un réfrigérateur, on débranche le moteur, la température intérieure étant $T_2 = 268K$. Au bout de 6 heures, cette température est de $T' = 273K$. On admet que pendant un intervalle de temps infinitésimal dt compris entre t et t+dt, la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur est donnée par $\delta Q = -aC(T(t) - T_1)dt$ où T_1 désigne la température extérieure constante de 298K, T(t) la température dans le réfrigérateur à l'instant t, C la capacité calorifique du réfrigérateur et a une constante.

1. Commenter le signe de δQ
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$.
3. En déduire $T(t)$.

4. Donner la dimension de la constante a. Calculer sa valeur.
5. On définit le coefficient d'efficacité e du réfrigérateur comme le rapport de la quantité de chaleur enlevée au frigo et le travail dépensée. calculer, en fonction de a, C, e, T_1 et T_2 la puissance minimale à fournir pour maintenir la température constante $T_2 = 268$K dans le frigo.
A.N. pour $e = 3$ et C=$2.10^5 J.K^{-1}$

Commentaire : Cet exercice est un extrait des ENSTIM. Comme le bilan s'effectue sur une durée dt, il faut penser à écrire tous les bilans de manière infinitésimale.

1.11 Chaleur fournie lors du changement d'état.

Objectifs :

1. *Savoir faire un bilan énergétique lors du changement d'état au contact d'un thermostat : décrire les étapes de la transformation.*
2. *Savoir faire dans les mêmes conditions le bilan d'entropie donc calculer l'entropie créée.*

1kg d'eau liquide, à la température $T_0 = -5°C$ est mise dans un piston mobile, sans frottement et de masse négligeable au contact de l'atmosphère de pression $P_e = 10^5$Pa. Ce piston aux parois diathermes est placé au contact d'un flamme qui se comporte comme un thermostat à la température de T_e =110°C.

1. Justifier que l'eau soit initialement dans l'état glace.
2. Quel est l'état final de l'eau ?
3. Justifier l'utilisation de l'enthalpie pour étudier la transformation.
4. Calculer la chaleur reçue par le système.
5. Cette transformation est elle réversible ?
6. Un opérateur extérieur arrête la flamme alors que 10% de la masse d'eau est passée sous forme vapeur. Calculer la chaleur reçue par le système jusqu'à ce que l'opérateur arrête la flamme.

Données :
$C_{eau\ (s)} = 2{,}09 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$, $C_{eau\ (l)} = 4{,}18 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$, l'eau vapeur sera assimilée à un gaz parfait de capacité calorifique $Cv = 1{,}18 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$. La chaleur latente de fusion et de vaporisation de l'eau sont $l_F = 334 kJ.kg^{-1}$ $l_V = 2265 kJ.kg^{-1}$.

Commentaire : Si les étapes de la transformation sont bien identifiées, chaque étape consiste en l'application d'une situation immédiate du cours. Cet exercice très très classique est un modèle de raisonnement en la matière.

1.12 Détermination de l'état final.

Objectifs :

1. *Savoir faire un bilan énergétique lors du changement d'état dans un calorimètre : décrire les étapes de la transformation pour chacune des phases initialement présentes.*
2. *Savoir faire dans les mêmes conditions le bilan d'entropie donc calculer l'entropie créée.*

Un récipient à parois rigides adiabatiques contient une masse $M_0 = 1kg$ de glace à la température $T_0 = 273°K$ sous la pression atmosphérique normale.
On verse dans ce récipient une masse M d'eau liquide à la température $T = 278°K$.
$C_{eau} = 4{,}18kJ.kg^{-1}.K^{-1}$, et la chaleur latente de fusion de la glace est $L = 334kJ.kg^{-1}$.

1. Discuter qualitativement les différentes situations finales possibles, en fonction d'une valeur particulière M_1 que l'on calculera.
2. Si M=20 Kg, calculer l'état final.
3. Si M=100 g, calculer l'état final.

Commentaire : La démarche de cet exercice est très semblable à la démarche de l'exercice précédent : décrire les étapes de la transformation de l'état initial à l'état final. Néanmoins, il faut y ajouter l'extensivité des fonctions H et S pour faire le calcul sur chacune des phases initialement présentes.

1.13 Mesure expérimentale de la chaleur latente de fusion de l'eau par calorimètrie.

Cet exercice est la suite de l'exercice 1.3. *Mesure expérimentale de la capacité calorifique du calorimètre.*
Une seconde expérience a été réalisée dans le même calorimètre :
Dans le calorimètre, contenant une masse $m_1 = 256g \pm 1g$ d'eau liquide a été introduite une masse $m_2 = 28g \pm 1g$ de glace fondante.
Un relevé de température de l'eau dans le calorimètre au cours du temps (une mesure toutes les 30 secondes) conduit au graphique suivant :
Commenter la courbe expérimentale.

FIGURE 1.2 – Courbe de température dans le calorimètre en fonction du temps.

Estimer à partir de cette courbe la chaleur latente de fusion de la glace.

Commentaire : Un exercice rédigé de manière plus moderne par son approche et par son questionnement, qui finit de reprendre les éléments essentiels vus en TP sur la calorimétrie.
La video suivante réalisée par les éditions Dunod récapitule en image les étapes essentielles du TP calorimétrie.

1.14 Effusion gazeuse.

Un récipient est séparée en deux compartiments identiques (1) et (2) de volume $V = 1l$, tous deux maintenus à la température $T = 300K$. Initialement, le compartiment (1) contient une mole de gaz parfait monoatomique et le compartiment (2) est vide. A t=0, on perce un petit trou de surface $S = 1mm^2$ dans la paroi séparant les deux compartiments et on s'intéresse au passage des atomes de (1) vers (2) : le phénomène d'effusion gazeuse. On note $N_1(t)$ le nombre de molécules dans la compartiment (1) à l'instant t.

1. Calculer $N_1(t = 0) = N_0$ le nombre de molécules dans le compartiment (1) initialement.
2. Quelles propriétés fondamentales doit vérifier la distribution des vitesses dans le gaz (1) ?
3. Proposer un modèle simplifié pour la distribution des vitesses.
4. Calculer $dN_{1\to2}$ le nombre de particules allant de (1) vers (2) entre l'instant t et l'instant t+dt.
5. Calculer $dN_{2\to1}$ le nombre de particules allant de (2) vers (1) entre l'instant t et l'instant t+dt.
6. Etablir l'équation d'évolution de $N_1(t)$. De même pour $N_2(t)$.
7. Calculer $N_1(t)$ et $N_2(t)$.
8. Donner un ordre de grandeur de τ le temps caractéristique du phénomène.
9. Comment évolue la pression dans les deux compartiments.
10. Commenter l'équilibre obtenue.

Un exercice de bilan simple mais qui nécessite une bonne maitrise du modèle simple de la distribution des vitesses dans un gaz.

`Réponse:` 3.$dN_{1\to2} = \frac{1}{6}Sv^*dtN_1(t)$ 4.$\tau\frac{dN_1}{dt} + N_1 = \frac{1}{2}N_0$ 5.$\tau = \frac{3V}{Sv^*} \simeq 10s$

1.15 Gaz de Photon.

Une onde électromagnétique se réfléchit sur un métal parfait (cf. étude des ondes électromagnétiques) et crée de ce fait une force, appelée force de pression de radiation. L'étude électromagnétique est possible, mais une approche fondée sur la dualité onde corpuscule permet d'étudier rapidement le problème.

Considérons le gaz de photon, véritable gaz parfait, associé à l'onde électromagnétique qui vient se réfléchir sur une voile solaire. La quantité de mouvement d'un photon est $\vec{P} = \hbar\vec{k}$ ($\hbar$ est la constante fondamentale caractéristique de la mécanique quantique, constante de Planck et $\vec{k}$ est le vecteur d'onde de l'onde associée) et l'énergie du photon $\epsilon = \hbar\omega$ (ω est la pulsation de l'onde associée). La relation entre ces grandeurs, appelée relation de dispersion est $k = \frac{\omega}{c}$.

1. Rappeler l'ordre de grandeur de $\hbar$
2. Comment se nomment les relations liant les grandeurs du photon et celles de l'onde associée.
3. Montrer que la pression de radiation qu'exerce un gaz de photon sur les parois du récipient est $p = \frac{1}{3}U$ où U désigne l'énergie interne du gaz.

Commentaire : Un exercice classique, un peu déroutant de prime abord. Il faut pour le resoudre penser à faire le lien avec la théorie cinétique (calcul de la pression cinétique pour le GPM). Les applications de cet effet sont les voiles solaires (sur lequel un peu de culture est toujours enrichissant ou le radiomètre de Crookes dont l'histoire est intéressante...

Chapitre 2

Diffusion thermique.

2.1 Diffusion de la chaleur dans une barre.

Une barre de rayon r, de longueur L, de conductivité thermique λ, relie deux "thermostats" de grand volume V identique, respectivement à la tempértaure T_1 en x=0 et T_2 à l'extrémité x=L du tube (les thermostats sont supposés à une température uniforme). La barre ainsi que les thermostats sont dans le même matériau : de masse volumique μ, de capacité calorifique massique c. L'ensemble est calorifugé.

1. Redémontrer l'équation de la chaleur (équation de diffusion) dans la barre en supposant la diffusion unidimensionnelle selon x.
2. Après avoir rappelé la loi phénomènologique de Fourier, retrouver l'équation de diffusion unidimensionnelle selon x.
3. On suppose dans cette question le régime stationnaire dans le tube.
   (a) Simplifier l'équation de diffusion.
   (b) Etablir l'expression de $T(x)$.
   (c) En déduire alors $\vec{j}_Q$. Commenter.
   (d) Calculer $\delta Q(x)$ la chaleur qui traverse la section S d'abcisse x de la barre. Cette grandeur dépend-t-elle de x ? Conclure.
   (e) Justifier alors que le régime ne puisse être strictement stationnaire dans le cadre de l'exercice.
4. On souhaite valider les résultats de la question précédente en se plaçant en régime quasi stationnaire. La température des thermostats dépend donc du temps $T_1(t)$ et $T_2(t)$.
   (a) Trouver les deux équations couplées liant $T_1(t)$ et $T_2(t)$ (uniformes)
   (b) Les résoudre en posant $\Sigma(t) = T_1(t) + T_2(t)$ et $\Delta(t) = T_1(t) - T_2(t)$
   (c) Valider alors l'ARQS. Commenter le résultat.

Commentaire : D'après oral. Un problème classique, très proche du cours. La démonstration de l'équation de diffusion est demandée à une dimension. L'étude en régime stationnaire est simple, la validation de l'ARQS se fait en comparant le temps de diffusion dans la barre et le temps caractéristique des variations de $T_1(t)$ et $T_2(t)$, qui s'obtient en faisant le bilan énergétique (ou premier *principe) dans chacun des pseudo-thermostats. On retrouve aussi l'idée qu'un bon thermostat est de volume très grand.*

2.2 Bilan thermique d'une maison.

La norme BBC 2012 (Batiment Basse Consomation) impose entre autre que la consommation énergétique d'une maison de 50 kWh(Equivalent Pétrol)/m^2.
Comparer à l'aide d'ordre de grandeur le gain (en économie d'énergie) lorsque le simple vitrage d'une maison standard est remplacé par du double vitrage, puis par du triple vitrage.
Faire une étude thermique complète de la maison standard.
Quelle épaisseur d'isolant type polystère doit recouvrir les murs de la maison pour atteindre la norme BBC ?
Commentaire : Un problème très classique de résistance thermique et leur association. Il ne s'agit que d'une application numérique mais qui révèle le progrès que permet le double vitrage en terme d'isolation mais la rédaction cet exercice est plus moderne car il vous appartient de proposer les bons ordres de grandeurs.

2.3 Survivre dans un igloo.

Pour survivre au froid de la nuit, il est possible de se constituer un abris de glace : un igloo, qui protège du froid. Sachant qu'un homme dégage une puissance de $P = 40W$, estimer quelle doit être l'épaisseur de glace ($\lambda = 5.10^{-2} W.K^{-1}.m^{-1}$) pour maintenir une température de 10°C à l'intérieur sachant que la température extérieure est de -20°C. (On prendra le rayon de l'igloo $R \simeq 1m$).
Commentaire : D'après oral. Un petit exercice à traiter en ordre de grandeur mais qui n'en demeure pas moins intéressant sur le régime permanent.

2.4 Onde thermique et température du sol.

On souhaite étudier les variations de températures dans le sol (en fonction du temps et de la profondeur) dues aux fluctuations de températures de l'air (journalière et saisonnière).
Le sol est pris à l'abcisse $z = 0$. La terre occupe l'espace $z < 0$ et est à la température $T(z, t)$, il possède (pour la couche arrable) une masse volumique $\mu = 2700 kg.m^{-3}$, une capacité calorifique $c = 1000 J.kg^{-1}.K^{-1}$ et une conductivité $\lambda = 2{,}7 W.m^{-1}.K^{-1}$.
L'air, quant à lui, est à la température $T(t) = T_0 + T_1 \cos(\omega_1.t) + T_2 \cos(\omega_2.t)$ avec $\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1$ jour, $\tau_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 1$ an, $T_0 \simeq T_1 \simeq T_2 \simeq 10°C$.

1. Trouver l'équation dont la température $T(z, t)$ est solution.
2. On cherche des solutions à cette équation de la forme pseudo onde plane progressive harmonique, OPPH* : $T(x, t) = Re(\underline{T}(x, t))$ avec $\underline{T}(x, t) = \underline{T}_M. \exp(j\omega t + jkz)$ et k complexe (en toute rigueur il devrait se noter $\underline{k}$).
   Justifier la forme de l'onde et le choix de ω réel.

3. Trouver la relation de dispersion de cette onde thermique dans le sol.
4. Calculer alors k' et k''.
5. Donner l'expression de $T(x,t)$. Interpréter.
6. En tenant compte des Conditions aux Limites sur le sol, en déduire alors l'expression complète de la température $T(x,t)$ dans le sol.
7. Estimer alors la distance caractéristiques sur laquelle les fluctuations journalières de température puis annuelles se font sentir.

Commentaire : D'après écrit Mines. Un problème classique, qui se rapproche de la physique des ondes et qui permet de faire une analogie forte avec l'effet de peau qui sera vu dans les métaux. La recherche d'une solution par superposition est simple et est une idée forte de la physique des ondes.

2.5 Température d'un astre.

Un astre sphérique de rayon R est placé dans le vide interstellaire. L'astre est radioactif. Les roches qui le composent "créent" une quantité de chaleur $\delta^2 Q = K dt d\tau$ par unité de temps dt et de volume $d\tau$. K est une constante caractéristique de la roche.

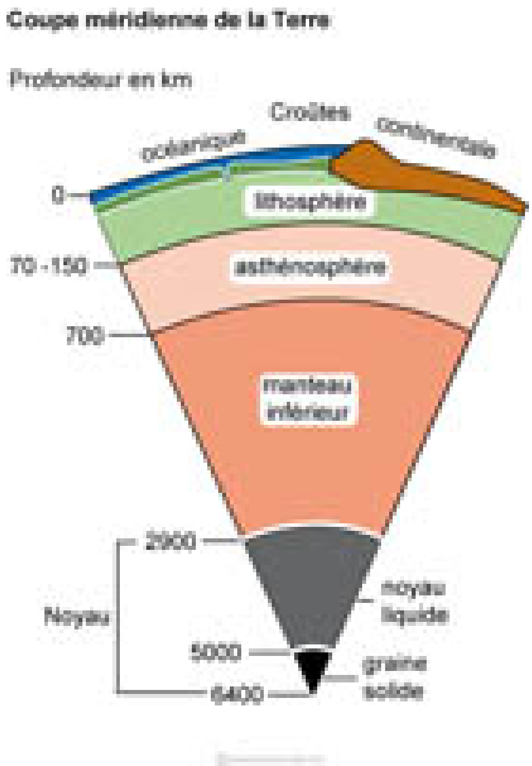

FIGURE 2.1 – Vue en coupe de la Terre (échelle non respectée).

1. Justifier que le vecteur densité de flux de chaleur s'écrit $\vec{j}_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r$.

2. Etablir l'équation de conservation de l'énergie dans le cas général (non stationnaire) liant le vecteur densité de flux et $T(r)$.
3. Simplifier cette équation en se plaçant dans le cas stationnaire.
4. Trouver alors l'équation de $T(r)$.
5. Déterminer le profil de température de l'astre en supposant qu'il évacue la chaleur par rayonnement à sa surface.
   La puissance surfacique rayonnée par un corps noir à la température T_S est $\phi = \sigma T_S^4$ où T_S désigne la température de surface et σ la constante de Boltmann.
6. Sachant que la température de fusion des roches de la Terre est de l'ordre de 1000°C, estimer la puissance K libérée par les roches de la terre.
7. Critiquer le modèle : est il adopté pour la terre ?

Commentaire : D'après oral et écrit Mines. Un exercice original, avec un bilan en géométrie sphérique et un terme de source. La fin de l'exercice a été rédigée de manière moderne, avec des informations à extraire de l'image et une discussion assez ouverte.

2.6 Gel d'un lac

Un lac de surface S gèle lorsque l'air au dessus de celui ci est à une tempétaure $T_a < 0°C$. Une couche de glace d'épaisseur e(x) apparaît. L'eau liquide du lac est, elle, à $T_e = 0°C$. L'interface air glace se situe en $x = 0$ et l'interface eau glace en $x = e(x)$, l'axe des x est donc selon la verticale descendante.
Données : chaleur latente de fusion de la glace $l_F = 330kJ.kg^{-1}$ à $T_F = 273°K$.
capacité calorifique de la glace $c_g = 4{,}06kJ.kg^{-1}.K^{-1}$, conductivité thermique $\lambda_g = 5.10^{-2}W.K^{-1}.m^{-1}$ et masse volumique $\mu_g = 990kg.m^{-3}$
capacité calorifique de l'eau liquide $c_l = 4{,}18kJ.kg^{-1}.K^{-1}$ et sa masse volumique $\mu_l = 1000kg.m^{-3}$
Dans une première partie, on suppose que l'air impose sa température T_a à la surface de la glace :

$T(z = 0, t) = T_a$

1. En régime permanent, établir l'expression de $T(x)$ dans la glase et exprimer le flux thermique ϕ traversant la glace
2. En faisant un bilan thermodynamique sur l'épaisseur de d'eau qui gèle pendant l'intervalle de temps dt, montrer que $e.\frac{de}{dt} = \alpha(T_F - T_a)$ avec α un coefficient à déterminer en fonction des données de l'énoncé.
3. Etablir la loi d'évolution de croissance de la glace $e(t)$
4. En déduire alors un temps caractéristique des variations de $e(t)$.
5. Discuter la validité de l'ARQS dans la glace.

Dans cette partie , on souhaite adopter un modèle plus réaliste : l'air au dessus de la glace ne parvient pas à imposer sa température et cet air est rarement au repos. Il convient donc de prendre en compte le flux conducto-convectif, modélisé par la loi de Newton

$$\phi_{cc} = hS(T_s - T_a)$$

où h est un coefficient (dépendant de la vitesse du vent), T_s la température de surface de la glace et T_a la température de l'air. [1]

1. Justifier par une phrase la continuité du flux thermique en z=0
2. En déduire que $T_s = \frac{T_a+(\lambda/eh)T_F}{1+(\lambda/eh)}$
3. Commenter alors le modèle de la première partie.
4. Etablir la nouvelle équation dont e(t) est solution.

Commentaire : D'après écrit. Un problème intéressant et de bon niveau qui fait intervenir de nombreux domaines de la physique : diffusion de la chaleur en regime permanent, premier principe et changement d'état, condition aux limites avec le flux conducto-convectif. Si les bilans sont clairs (les idées physiques des bilans) alors l'exercice est sans grande difficulté mais interrogez vous sur le sens de chaque bilan écrit.

2.7 Refroidissement d'une ailette.

Pour évacuer de la chaleur d'une pièce métallique vers l'atmosphère extérieur, des "ailettes" sont placées sur la pièce pour augmenter la surface de contact entre le pièce et l'air. Les ailettes sont de conductivité λ, de masse volumique ρ et de capacité calorifique massique c.
Une ailette est donc un parallèlépipède a.a.c (selon x, y, z) avec c<a, tel que le petit côté ac est collé sur la pièce métallique à refroidir en x=0.
Cette plaque de conductivité thermique λ est supposée posséder une température $T(x)$ ne dépendant que de x, pas du temps (régime stationnaire). L'atmosphère, elle, est supposée à la température T_a et on tient dans les **pertes** de chaleur à travers une surface dS de l'ailette avec l'atmosphère pendant dt du le flux conducto-convectif, modélisé par la loi de Newton

$$\delta^2 Q_{cc} = h(T(x) - T_a)dSdt$$

où h est un coefficient (dépendant de la vitesse du vent), $T(x)$ la température de l'ailette à l'abcisse x et T_a la température de l'air.

1. En faisant un bilan énergétique sur une tranche dx de l'ailette, montrer que $\delta^2 \frac{d^2T}{dx^2} - T = -T_a$ avec δ à exprimer en fonction des données.
2. Simplifer cette expression en supposant $c << a$
3. Vérifier avec des ordres de grandeur raisonnable que $\delta << a$.

1. La convection augmente donc le flux de chaleur pris à un objet : on perd plus de chaleur dans le vent que lorsqu'il n'y a pas de vent.

FIGURE 2.2 – Ailette de refroidissement d'un moteur.

4. On suppose donc la condition $\delta << a$ vérifiée, ce qui premet d'imaginer l'ailette comme infini et donc $T(x=\infty)=T_a$. Etablir $T(x)$ Commenter.
5. Calculer le flux thermique total ϕ évacué par l'ailette.
6. Evaluer le flux conducto convectif en l'absence d'ailette $\phi_{cc\ brut}$.
7. Définir alors l'efficacité de l'ailette. Commenter.

Commentaire : D'après oral Mines et ADS. Un exercice très classique sur les ailettes, que vous pouvez observer sur les moteurs, sur certains transistors de puissance et sur les alimentations stabilisées. Pour refroidir, il faut augmenter la surface de contact entre l'atmosphère et le milieu. Toute la physique se fait à la première question : poser proprement (avec des mots) le bilan. La suite n'est qu'une résolution intelligente et une discussion, interprétation des résultats sans difficulté.

2.8 Fusible.

Un fusible électrique est fil électrique (cylindrique) de longueur L et de rayon $a << L$, de conductivité électrique σ, de conductivité thermique λ, de masse volumique μ. Le fil doit fondre si la densité de courant $\vec{j} = j\vec{u}_z$ uniforme dépasse une certaine valeure.
On souhaite donc étudier la température dans le fil en fonction du courant qui le traverse. La répartition de température est supposée en régime stationnaire mais radiale de telle sorte que $T(r)$.

1. En faisant un bilan énergétique sur la couronne comprise entre r et r+dr, montrer que la température au sein du fusible vérifie $\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r.\frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{j^2}{\sigma} = 0$.
2. En déduire $T(r)$ à deux constantes multiplicatives près.
3. Par un argument physique, éliminer une de ces deux constantes.
4. En supposant que l'atmosphère impose $T(r=a)=T_0$, déterminer complètement $T(r)$.

FIGURE 2.3 – Fusible.

5. Sachant que la témperature de fusion du métal est T_F, déterminer le rayon a_0 du fusible permettant de faire fondre le fusible si $I > I_0$
6. En réalité, l'atmosphère ne peut imposer sa température au fusible mais il faut prendre en compte le flux conducto-convectif, modélisé par la loi de Newton $\phi_{cc} = h.2\pi aL.(T(a) - T_0)$ $(ah << \lambda)$. Calculer le nouveau rayon a_0 du fusible permettant de faire fondre le fusible si $I > I_0$

Commentaire : D'après écrit et oraux X. Un exercice un peu plus difficile dans la mesure, du fait de la symétrie non pas cartésienne comme dans les exercices précédents mais cylindrique. Néanmoins, une fois l'équation bilan correctement établi, l'exercice n'est pas difficile. Les fusibles tendent aujourd'hui à disparaître (mais pas cet exercice...) au profit de dispositif "moins dangereux" les différentiels, qui ne fondent pas et qui ont un temps de réponse plus court.

2.9 Diffusion dans une paroi de four et bilan d'entropie.

Une plaque parallèlipédique, de longueur L selon Ox, de largeur l selon Oy et hauteur h selon Oz, sépare l'intérieur du four industriel à la température T_F en x=0 de l'extérieur à la température T_0 en x=L (les thermostats sont supposés à une température uniforme). La plaque est de conductivité thermique λ, de masse volumique μ, de capacité calorifique massique c.

1. La plaque est supposée calorifugée latéralement.
   (a) Etablir l'expression de la température dans la plaque ainsi que la chaleur la traversant par unité de temps.
   (b) Calculer l'entropie crée par unité de temps dans la plaque. Conclure.

2. La plaque latérale n'est plus supposée calorifugée mais au contact direct de l'amopshère. Cette dernière évacue alors la chaleur par flux conducto-convectif.
   Un élément de surface dS latéral évacue vers l'atmosphère un puissante thermique $h(T - T_0)dS$ par flux conducto-convectif.

(a) Etablir la nouvelle équation dont $T(x)$ est solution.

(b) La résoudre dans le cas où L est grand.

(c) Préciser a posteriori la signification de "L grand".

Commentaire : D'après oraux Centrale. Un exercice sans grande difficulté. La première partie est classique et le bilan d'entropie au contact de deux thermostat montre l'irréversibilité attendue mais néanmoins à commenter. La seconde partie fait intervenir le flux conducto-convectif et l'évacuation de la chaleur via les parois latérales. Il se rapproche à ce titre du problème de l'ailette dans une version simplifiée.

Chapitre 3

Diffusion de particules

3.1 Approximation des régimes stationnaires dans un tube.

Le dispositif expérimental (et historique) est le suivant : un tube fin de rayon r, de longueur L, relie deux réservoirs de grand volume V identique, remplis d'eau. La hauteur d'eau est la même de part et d'autre du tube, si bien qu'il n'y a pas de convection, pas de mouvement de l'eau. Le réservoir de gauche, en x=0, contient $N_1 = n_1.V$ particules de colorant alors que le second reservoir, à l'extrémité x=L du tube, en contient lui une quantité N_2. Le colorant diffuse donc dans le tube. Le coefficient de diffusion de ce colorant dans l'eau est noté D.

1. Redémontrer l'équation de conservation du nombre de particules dans la barre en supposant la diffusion unidimensionnelle selon x.
2. Après avoir rappelé la loi phénomènologique de Fick, retrouver l'équation de diffusion unidimensionnelle selon x.
3. On suppose dans cette question le régime stationnaire dans le tube.
   (a) Simplifier l'équation de diffusion.
   (b) Etablir l'expression de $n(x)$ la densité de colorant dans le tube à l'abcisse x.
   (c) En déduire alors $\vec{j}_N$. Commenter.
   (d) Calculer $\delta N(x = 0)$ le nombre de particules traversant la section en x=0 (entrée) de la barre.
   (e) Calculer $\delta N(x = L)$ le nombre de particules traversant la section en x=L (sortie) de la barre. Commenter.
   (f) Justifier alors que le régime ne puisse être strictement stationnaire.
4. On souhaite valider les résultats de la question précédente en se plaçant en régime quasi stationnaire.
   (a) A partir des résultats obtenus précédemment, trouver les deux équations couplées liant $n_1(t)$ et $n_2(t)$ (uniforme dans les grands réservoirs)
   (b) Les résoudre en posant $\Sigma(t) = n_1(t) + n_2(t)$ et $\Delta(t) = n_1(t) - n_2(t)$

(c) Valider alors l'ARQS. Commenter le résultat.

Commentaire : D'après CCP. Un problème très classique, très détaillé et très proche du cours. La démonstration de l'équation de diffusion est demandée à une dimension. L'étude en régime stationnaire est simple, la validation de l'ARQS se fait en comparant le temps de diffusion dans la barre et le temps caractéristique des variations de $n_1(t)$ et $n_2(t)$, qui s'obtient en faisant le bilan des particules dans le réservoir considéré.

3.2 Solution autosimilaire de l'équation de diffusion.

On considère un tube cylindrique supposé infini de x=$-\infty$ à x=$+\infty$ et de rayon R, rempli d'eau. N_0 particules de colorant sont introduites à t=0 en $-a < x < a$ avec $a << R$. Le coefficient de diffusion de ce colorant dans l'eau est noté D.

1. Redémontrer l'équation de conservation du nombre de particules dans la barre en supposant la diffusion unidimensionnelle selon x.
2. Après avoir rappelé la loi phénomènologique de Fick, retrouver l'équation de diffusion unidimensionnelle selon x.
3. Justifier que les C.L. sont $n(x=-\infty)=0$ et $n(x=+\infty)=0$.
Justifier brièvement que la C.I. puisse s'écrire $\int_{-\infty}^{\infty} n(x,t=0)dx.\pi R^2 = N_0$.
Il existe une unique solution à l'équation de diffusion satisfaisant les C.I. et les C.L. proposées. La suite de ce problème propose d'étudier partiellement cette solution.
4. Justifier brièvement par un argument physique que la relation $\int_{-\infty}^{\infty} n(x,t)dx.\pi R^2 = N_0$ est vraie $\forall t > 0$.
5. Pour chercher la solution, nous allons chercher les lois d'invariance d'échelle. On cherche donc une solution de la $n'(x,t) = p.n(p.x, q.t)$ où n' est aussi solution de l'équation de diffusion. (On cherche quelle dilatation de l'espace et du temps laisse le problème invariant.)
Montrer que $n'(X,T) = q^{0.5}.n(q^{0.5}.x, q.t)$ est une solution autosimilaire.
6. Justifier que l'on puisse alors poser $q = \frac{1}{t}$, en quoi cela simplifie-t-il le problème.
7. Dans la question précédente, on est parveu à montrer que $n(x,t)$ devait s'écrire sous forme $n(x,t) = \frac{f(u)}{t^{0.5}}$. En injectant cette forme dans l'équation différentielle, on trouve (le calcul est possible mais fastidieux et non demandé) donne
$$\frac{d}{du}(u^{0.5} f(u)) = -4D\frac{d}{du}(u^{0.5}\frac{df}{du})$$
En déduire alors que $f(u) = A.\exp(-\frac{u}{4D})$
Soit $n(x,t) = A.\frac{1}{(Dt)^{0.5}}\exp(-\frac{x^2}{4Dt})$
8. Comment calculer A ? Montrer que $A = \frac{N_0}{\pi R^2 (4\pi)^{0.5}}$
9. Discuter les graphiques représentant la solution.

Commentaire : D'après Mines. Un problème difficile et assez calculatoire mais qui demeure intéressant. La technique de recherche d'équation par invariance par changement d'échelle est très porteuse en physique. On parle de renormalisation du problème bien qu'ici l'approche soit simple.

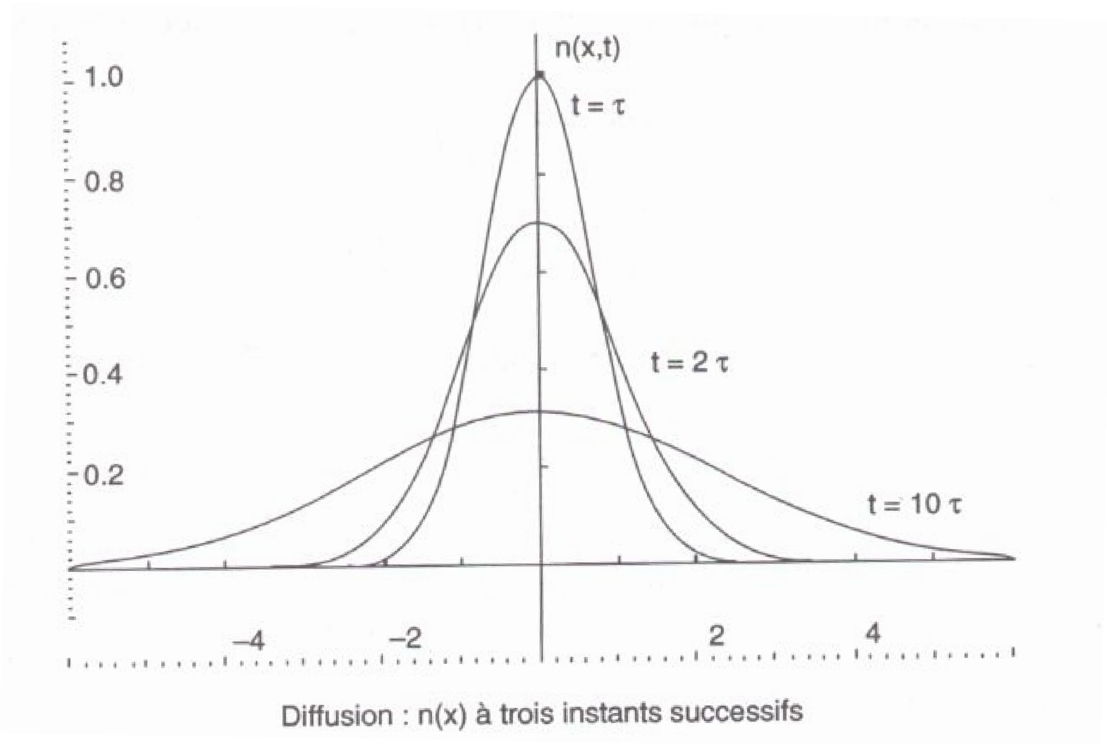

FIGURE 3.1 – Solution autosimiliaire de l'équation de diffusion à divers instants donné en fonction de x

3.3 Diffusion de neutrons en présence d'une source.

Etudions la diffusion des neutrons dans un barreau cylindrique de plutonium d'axe Oz, compris entre $z = 0$ et $z = L$, et de section droite S. On souhaite déterminer l'évolution du nombre de neutrons par unité de volume $n(z, t)$ sachant que :

1. les neutrons diffusent dans le barreau d'uranium avec un coefficient de diffusion $D = 22m^2.s^{-1}$
2. des neutrons sont produits au sein même du barreau par réaction nucléaire. Dans un volume $d\tau$ du barreau, $\delta^2 N_{neutrons\ crees}$ neutons sont créés par unité de dt : $\delta^2 N_{neutrons\ crees} = \alpha n(M, t) d\tau dt$ avec $\alpha = 3{,}5.10^4 s^{-1}$.
3. Les extrémités $z = 0$ et $z = L$ du barreau sont au contact d'un matériau absorbant, de telle sorte que $n(z = 0, t) = n(z = L, t) = 0\ \forall t$

1. Montrer que $n(z, t)$ est solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + \alpha n$$

2. On suppose le régime stationnaire atteint. Déterminer $n(z)$ à une constante multiplicative près sachant que n ne s'annule pas dans le barreau

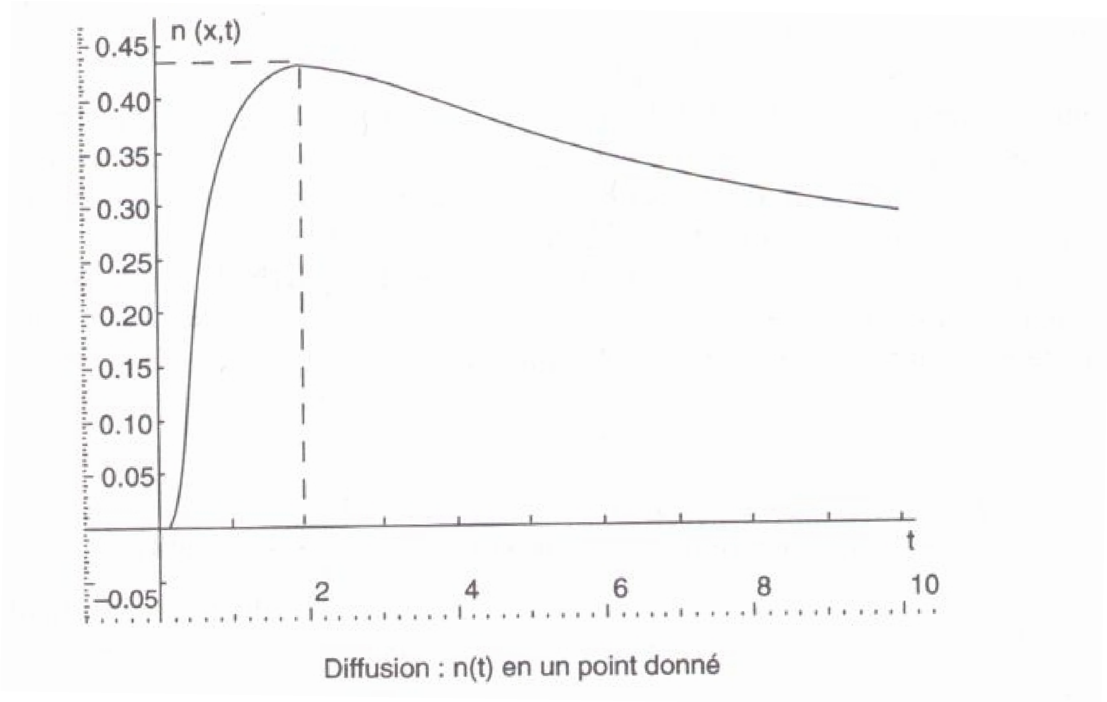

FIGURE 3.2 – Solution autosimiliaire de l'équation de diffusion à x donnée en fonction du temps

3. En déduire alors que ce régime n'est possible que si $L = L_{critique}$
4. On cherche maintenant des solutions sous forme d'onde stationnaire $n(z,t) = f(z)g(t)$. Trouver les équations dont f et g sont solutions.
5. Montrer que n diverge si $L > L_{critique}$. Commenter.

Commentaire : D'après oral et écrit Mines et CCP. Un problème très classique avec un terme de source. La recherche de la solution en régime stationnaire est simple mais il faut penser à exploiter toutes les données de l'énoncé ; la recherche en solution sous forme onde stationnaire est plus riche, il faut spontanément penser à la séparation des variables. La notion de masse critique est essentielle pour les réactions nucléaires.

3.4 Le marcheur ivre et la diffusion.

Un homme ivre (de bonheur) se situe à t=0 en x=0. Dans chaque intervalle de temps dt, il fait un pas (pour maintenir son équilibre incertain) de longueur a soit vers la droite avec une probabilité $\frac{1}{2}$, soit vers la gauche avec une probabilité $\frac{1}{2}$. (Le marcheur ne se déplace que suivant x et occupe donc une abcisse $x_n = n.a$)
On appelle p(x_n,t) la probabilité que le marcheur se trouve en x_n à l'instant t et le but de ce problème est d'étudier la loi d'évolution de cette probabilité.

1. Justifier que $p(x_n, t + dt) = \frac{1}{2}p(x_{n-1}, t) + \frac{1}{2}p(x_{n+1}, t)$

2. En faisant l'approximation des milieux continus, montrer que la probabilité p(x,t) obéit à une équation de diffusion.
3. Après une durée τ, à quelle distance de l'origine se trouvera "en moyenne" le marcheur ivre ?
4. La personne retrouve un ϵ de lucidité et donc il fait un pas (pour maintenir son équilibre incertain) de longueur a soit vers la droite avec une probabilité $\frac{1}{2}+\epsilon$, soit vers la gauche avec une probabilité $\frac{1}{2}-\epsilon$. Trouver la nouvelle équation dont est solution p(x,t) Commenter.

Commentaire : D'après oral et ADS. Le phénomène de marche au hasard doit être associé dans votre esprit au phénomène de diffusion. Ce modèle présenté ici de manière amusante est un modèle qui peut être utilisé pour décrire avec précision la diffusion de molécules à la surface d'un solide (ou sur des sites d'adsorbtion). Il peut être généralisé à deux dimension et même à trois dimensions dans le cas de pas de direction quelconque. La dernière question invite à la reflexion entre phénomène de diffusion et phénomène de propagation.

3.5 Purification du silicium

Le silicium est l'élément essentiel de tous les composants électroniques. Il doit être purifié pour être utilisé dans l'électronique.
L'idée de la purification est simple : on chauffe une partie du silicium (par induction) et les impuretés sont plus solubles dans le silicium chaud que dans le silicium froid. Ainsi on déplace les impuretés vers une extrémité du barreau de silicium et on en sectionne une partie. On recommence l'opération jusqu'à obtenir la pureté souhaitée.
On s'intéresse à un barreau de silicium cylindrique de section droite S et d'axe Oz.

1. Faire une brève recherche internet sur le silicium, son utilisation et sa purification.
2. On se place pour l'étude dans le référentiel R' lié au système de chauffage (qui se translate selon z à vitesse constante.) Le barreau se déplace donc dans le référentiel R'.
   Du fait du chauffage, il existe un gradiant de température constant $\vec{grad}T = -\alpha$. Exprimez $T(z')$ sachant que $T(z'=0)=T_0$
3. On note $[I]_s$ et $[I]_l$ la concentration des impuretés respectivement dans la phase solide (supposée constante et uniforme) et liquide (qui dépendra de z').
   La température de fusion est diminuée par la présence des impuretés et on dispose de la formule approchée $T_F = T_{F\ pur} - a[I]_l$
   Par ailleurs il existe un équilibre chimique entre les impuretés dans la phase solide et la phase liquide $I_s = I_l$ de constante d'équilibre chimique K.
   Déterminer $[I]_l$ en fonction de K et $[I]_s$.
   Montrer que la côte z'_F où débute la fusion du silicium s'écrit $z'_F = \frac{T_0 - T_{F\ pur} + aK[I]_s}{\alpha}$ Cette abcisse étant constante, on la prendra comme nouvelle origine z'=0.

   Les impuretés diffusent dans la phase liquide du silicium (coefficient de diffusion D) mais pas dans la phase solide où on suppose leur concentration $[I]_s$ constante.

4. Rappeler sans démonstration l'équation de diffusion tridimensionelle.

   Ici, le fait est qu'il y a un mouvement apparent du silicium dans le référentiel R' (mouvement d'ensemble) il faut donc traiter la dérivée temporelle de l'équation de diffusion comme une dérivée particulaire $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}.vec\text{grad})\vec{v}$.
   Transformer l'équation de diffusion.
   Montrer qu'en régime stationnaire, $[I]_l$ est solution de l'équation

$$\frac{d[I]_l}{dz'} = \delta \frac{d^2[I]_l}{dz'^2}$$

   On donnera l'expression de δ en fonction de D le coefficient de diffusion et de v la vitesse de translation et on justifiera sa dimension par deux méthodes différentes.
5. En déduire l'expression de $[I]_l(z')$ en fonction de K, δ et $[I](\infty) = I(z' = -\infty)$
6. Justifier qualitativement que $[I](\infty) = I(z' = -\infty) < [I]_s$
7. Tracer l'allure de $[I]_l(z')$
8. Quelle longueur du barreau de silicium faut il ôter pour éliminer un maximum d'impureté ? Discuter.

Commentaire : D'après écrit Centrale. Un exercice peu difficile mais à l'énoncé un peu déroutant. Il faut se laisser guider par l'énoncé. L'utilisation d'une dérivée particulaire est intéressante car généralisable. Et l'application est au finale importante comme votre recherche internet l'aura révélé !