Exercices de Physique des Ondes Scalaires

⋆ ⋆ ⋆

PC

Philippe Ribière

Année Scolaire 2013-2014

Chapitre 1

Equation de d'Alembert.

1.1 Onde longitudinale dans les solides.

On considère une chaîne infinie d'atomes de masse m, séparés par des ressorts de longueur à vide d et de raideur k. La distance entre les atomes au repos est d et la masse le déplacement du $n^{ième}$ atome par rapport à la position d'équilibre est noté $\xi_n(t)$.
Ce modèle permet d'étudier la propagation d'une onde sonore (ou de tout onde de compression, comme les onde sismique P) dans un solide.

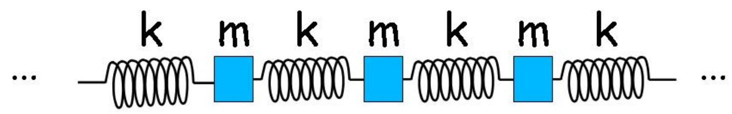

FIGURE 1.1 – Chaîne infinie d'atomes, modèle de la propagation du son dans les solides.

1. Justifier le modèle adopté du ressort pour les interactions entre atomes.
2. Trouver l'équation vérifiée par $\xi_n(t)$.

3. Faire l'approximation des milieux continus.
   La distance entre deux atomes dans un cristal est de l'ordre de 10^{-10}m, distance très inférieure au longueur d'onde étudiée.
   D'où l'on définie une fonction $\xi(x,t)$ de l'espace et du temps par la relation suivante :
   $\xi(x = nd, t) = \xi_n(t)$.
   Trouver alors que l'équation aux dérivées partielles, appelé équation de propagation, que vérifie $\xi(x,t)$.
   Justifier avec soin la nécessité du développement limité.

   On cherche des solutions de la forme $\xi(x,t) = A\cos(\omega.t - k.x)$.
4. Justifier le nom d'onde plane progressive harmonique longitudinales donnée à cette solution et le choix fait d'une telle solution.
5. Retrouver alors le lien entre ω et k, appelé relation de dispersion.
6. En déduire la vitesse de phase de l'onde et justifier que ce milieu est alors non dispersif.
7. Rétablir la vitesse de propagation de l'onde en fonction du module d'Young et de la masse volumique.

Commentaire :
Un exercice de cours, à maitriser parfaitement. La résolution en cherchant tout de suite des solutions de la forme OPPH est différente de la résolution vue en cours mais c'est cette approche qui sera généraliser. La démonstration de cours a permis de montrer que les OPPH étaient une solution de l'équation de d'Alembert et les exercices réexploitent cette idée pour gagner du temps et simplement retrouver la relation entre k et ω.

1.2 La corde vibrante ou corde de Melde.

On étudie le dispositif expérimental de Melde. Cette corde est supposée inextensible, de longueur L, de masse linéïque μ. Elle est tendue à l'aide d'une masse M accrochée à la corde via une poulie parfaite et excitée par un vibreur à son autre extrémité. On appelle $y(x,t)$ le déplacement transversale d'un morceau de la corde de Melde situé en x à l'instant t.
Pour cette étude, deux hypothèses sont nécessaires.

1. On négligera le déplacement de la corde suivant l'axe des x, tant et si bien que un point de la corde situé en $(x, 0)$ à l'équilibre se retrouve en $(x, y(x,t))$ lors de la vibration de la corde.
2. On supposera le déplacement de la corde faible de manière à ce que l'angle $\alpha(x,t)$ de la corde avec l'horizontal est faible et donc on se limite à ordre 1 dans les Dl en cet infiniment petit.

Remarque : ces deux hypothèses sont cohérentes entre elles, elles se regroupent sous la dénomination "approximation des petits mouvements".

1. Trouver l'équation de propagation dont $y(x,t)$ est solution.
   (Indiquer clairement où les hypothèses faites sont utilisées)

2. Montrer alors la relation de dispersion est $k^2 = \frac{\omega^2}{C^2}$.
3. Les conditions aux limites pour la corde sont les suivantes :

$$y(x = 0, t) = a\cos(\omega t)$$

et

$$y(x = L, t) = 0$$

Justifiez brièvement ces conditions aux limites.
4. Pour répondre à ces conditions aux limites, la solution proposée est de la forme

$$y(x, t) = A\cos(\omega t - \phi)\cos(kx - \psi)$$

Comment ce nomme ce type de solution ? Justifiez le choix d'une pareille solution.
5. Montrer que la solution s'écrit

$$y(x, t) = \frac{a}{\sin(kL)}\cos(\omega t)\sin(kL - kx)$$

6. Que se passe-t-il lorsque $\omega = \omega_n = \frac{n\Pi c}{L}$? Comment se nomme se phénomène ?
7. La divergence observée ci dessus est-elle physique ? Que se passe-t-il réellement ?
8. Interpréter en décomposant la solution stationnaire proposée comme la somme de deux ondes planes progressives harmoniques et commenter.

Commentaire :
Un exercice de cours, à maitriser parfaitement. La résolution propose de chercher la solution sous forme d'OPS, compte tenu des CL mais il suggère aussi de revenir à l'interprétation en terme d'OPPH, ce qui est formateur (et très classique).

1.3 Echelle de péroquet : onde de torsion.

On considère une échelle de peroquet constituées de barres accrochées en leur centre par un fil de torsion selon $\vec{u}_z$. Chaque barre est de moment d'inertie J, et ces barres sont séparés par un portion d de fil de torsion (un fil de torsion, appelé aussi ressort de torsion, exerce un couple $\vec{\Gamma} = -C.(\alpha_2 - \alpha_1)\vec{u}_z$ où C est une caractéristique du fil de torsion et α_i les angles entre les deux extrémités du fil et un axe vertical). L'angle de la $n^{ième}$ barre par rapport à la position d'équilibre est noté $\theta_n(t)$.

1. Trouver l'équation vérifiée par $\theta_n(t)$.
2. Faire l'approximation des milieux continus.
On définie une fonction $\theta(z, t)$ de l'espace et du temps par la relation suivante $\theta(z = nd, t) = \theta_n(t)$.

3. Faire un développement limité de $\theta(z + d, t)$ et $\theta(z - d, t)$ à l'ordre 2 (en justifiant la nécessité de faire le DL à cet ordre.)

4. En déduire alors l'équation de propagation de $\theta(z,t)$, calculer la vitesse de propagation de l'onde.
5. Justifier la dimension de c dans cette équation.
6. Justifier que la solution de cette équation peut être cherchée sous la forme $\theta(z,t) = \theta_0 \cos(\omega t - kz)$.
7. Etablir le lien entre ω et k.

Commentaire :
L'exercice décrit une expérience de lycée, sa présentation est un peu originale dans son approche par la mécanique du solide et du fil de torsion mais sa résolution est très proche du cours.

1.4 La corde vibrante conductrice.

On étudie une corde métallique (donc conductrice) de masse linéique μ et tendu par une tension T entre deux points fixe $x = 0$ et $x = L$. Cette corde est confondue au repos avec l'axe des x i.e. son poids est négligeable. Elle est aussi parcourue par un courant d'intensité $I(t) = I_0. \cos(\omega t)$ et l'ensemble du dispositif expérimental est plongé dans un champ magnétique stationnaire non uniforme : $\overrightarrow{B} = B_0. \sin(\pi x/L)\vec{u}_y$.
On s'intéresse alors à la petite vibration de la corde métallique selon l'axe z : $z(x,t)$.

1. Rappeler l'expression de la force de Laplace auquel est soumis un élément de longueur $d\overrightarrow{l} = dx\vec{u}_x$ parcourue par le courant $I(t)$ dans le champ magnétique $\overrightarrow{B}$.
2. Montrer alors que $z(x,t)$ vérifie l'équation de propagation :
$$\Box z = \frac{I_0 B_0}{T} \sin(\pi x/L) \cos(\omega t)$$
3. En régime sinusoidal forcée, on cherche des solutions de la forme $z(x,t) = A \sin(\pi x/L) \cos(\omega t)$. Calculer A. Commenter.
4. En réalité, le champ magnétique n'a pas la forme proposée ci dessus. Il est simplement crée par un aimant en U placée au centre de la corde. On admet qu'à l'intérieur de l'entrefer de longueur l de l'aimant, le champ magnétique est uniforme $\overrightarrow{B} = B_0\vec{u}_y$ et qu'il est nul à l'extérieur.
$\overrightarrow{B} = B_0\vec{u}_y$ si $(L-l)/2 < x < (L+l)/2$, nul sinon.
En imaginant (mathématiquement) que l'on étende le champ magnétique sur tout l'espace, d'abord entre $x = -L$ et $x = O$ en supposant la fonction impaire puis par 2L-périodicité, on obtient pour développement en série de Fourier :
$\overrightarrow{B} = \Sigma_0^\infty B_{0\ n} \sin(n\pi x/L)\vec{u}_y$
Déterminer alors pour quelles fréquences s'observe la résonance.

Commentaire :
Un exercice sur la corde vibrante, proche du cours mais original dans la manière d'exciter la corde. La résolution est guidée. L'interprétation de la résonance au final n'est pas compliquée mais nécessite une lecture attentive de l'énoncé et un peu de recul sur le DSF.

1.5 Propagation dans une ligne bifilaire sans perte.

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance $l.dx$ et d'une capacité γdx.

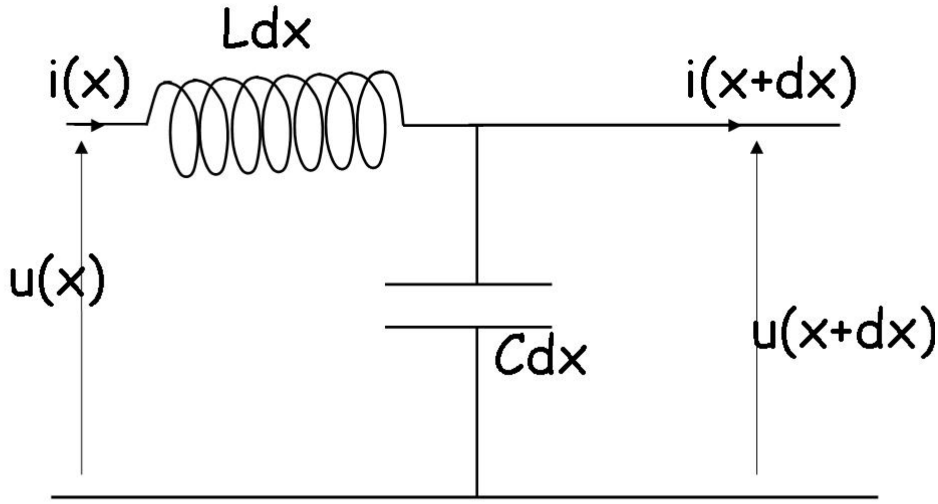

FIGURE 1.2 – Modèle d'une tranche dx de câble coaxial idéal .

1. Rappeler pourquoi il est possible de travailler sur la tranche d'épaisseur dx dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) alors que le phénomène étudié est un phénomène de propagation.
2. Etablir les deux équations différentielles du premier ordre vérifiées par u(x,t) et i(x,t).
3. Montrer que u(x,t) et i(x,t) sont solutions d'équations de d'Alembert. Quelle est la vitesse de propagation des ondes ?
4. Etablir la relation de dispersion pour une OPPH.
5. Pour une OPPH selon $+\vec{u}_x$, montrer que le rapport $\frac{u}{i}$ est lié à une caractéristique de la ligne.
6. Chercher l'équation énergétique liée à la propagation. Interpréter la forme trouvée.
7. Dans le cas où cette ligne est semi infinie, fermée en $x = 0$ par un court circuit et qu'une OPPH incidente selon $+\vec{u}_x$ $u_i(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ est émise en $x = -\infty$, calculer $v(x,t)$ et $i(x,t)$ total.
8. Interpréter la solution ci dessus en terme d'onde plane.

Commentaire :
Le début est un exercice de cours, à maitriser parfaitement. La recherche de l'équation énergétique est intéressante pour deux raisons : premièrement, l'énergie est une grandeur très pertinente pour le physicien, et deuxièmement, la forme de l'équation est générale, son interprétation sera réexploité. La méthode de résolution est libre, soit en superposition de 2 OPPH déphasées se propageant en sens inverse, soit directement en terme OPS, néanmoins l'énoncé suggère encore une fois, au final, de revenir à l'interprétation en terme d'OPPH.

1.6 Propagation dans un tuyau sonore.

On souhaite étudier la propagation du son dans l'air (sans recours aux équations de la mécanique des fluides). Pour cela on image un tuyau de section S, d'axe x, partagé en une infinité de compartiments (C_n).
Le compartiment (C_n) est séparé du compartiment (C_{n-1}) par le piston calorifugé Π_n et séparé du compartiment (C_{n+1}) par le piston calorifugé Π_{n+1}. Chaque piston est de masse m, de section S et coulisse sans frottement dans le tube.
Dans chaque compartiment C_n se trouve une mole de gaz parfait diatomique, l'air.
A l'équilibre, le piston Π_n est à la position $x_n = n.a$ et la pression dans chaque compatiment est p_0.
Hors équilibre, au passage de l'onde sonore, le piston Π_n est déplacé de sa position d'équilibre d'une petite longueur $\xi_n(t) << a$ et de telle sorte que sa position soit $x_n = n.a + \xi_n(t)$. L'air dans le compartiment subit alors une transformation adiabatique réversible (aussi appelée isentropique) et on note $p_n(t)$ la pression dans le compartiment n.

1. Rappeler la loi de Laplace lien la pression P et le volume V lors d'une évolution adiabatique réversible d'un gaz parfait.
   On précisera la valeur de γ pour l'air.
2. Etablir alors l'expression de p_n en fonction de p_0, γ, a, ξ_n et ξ_{n+1}. La linéariser.
3. En déduire l'équation du mouvement de ξ_n :
$$\frac{d^2\xi_n}{dt^2} = (\frac{\gamma S p_0}{ma})(\xi_{n+1}(t) + \xi_{n-1}(t) + 2\xi_n(t)$$
4. Faire l'approximation des milieux continus : définir $\xi(x,t)$ tel que $\xi(x = na, t) = \xi_n(t)$.
   Etablir alors l'équation de propagation (équation aux dérivées partielles) dont est solution $\xi(x,t)$.
   Définir la vitesse de propagation de l'onde. Commenter.
5. La masse m du piston est en fait la masse d'un compartiment (C_n). Calculer numériquement la vitesse de l'onde sachant que la masse volumique de l'air est $\mu = 1{,}3 kg.m^{-3}$.

Commentaire :
Un exercice très proche du cours, posé à l'oral et à plusieurs écrits. L'approche utilisée pour étudier les ondes sonores dans un solide est ici réexploitée pour étudier les ondes sonores dans l'air. Si la modélisation ne paraît pas naturelle au premier abord, la résolution est simple. Une bonne maitrise des DL est nécessaire comme toujours en physique des ondes.

1.7 Modes propres d'un ressort.

On considère un ressort horizontal de masse linéique μ, de longueur à vide L_0, accroché à son extrémité en x=0 à un support fixe et l'autre extrémité est relié à une masse M, de masse m, ponctuelle, susceptible de se déplacer sans frottement le long de l'axe des x. Son abcisse est notée $X(t)$ par rapport à sa position d'équilibre
On s'intéresse à l'onde dans le ressort et on repère donc le déplacement d'une spire située au repos à l'abcisse x par un $\xi(x,t)$. En présence de l'onde, la spire est donc située en $x+\xi(x,t)$.
On modélise l'interaction entre les spires à droite du ressort sur celles situées à gauche par une force de Hooke : $\overrightarrow{F}_{d\to g} = k\frac{\partial \xi}{\partial x}\overrightarrow{u}_x$ où k est une caractéristique du matériau du ressort.

1. Montrer que $\xi(x,t)$ est solution d'une équation de d'Alembert. Calculer la célérité de l'onde. Commenter.
2. (a) On souhaite faire l'approximation des régimes quasi-stationnaires i.e. on néglige les dérivées temporelles dans l'équation de d'Alembert.
   Déterminer $\xi(x,t)$ en fonction de x, $X(t)$ et L_0
   (b) Calculer la force qu'exerce le ressort sur la masse M, de masse m, en fonction k, L_0 et $X(t)$. En déduire la raideur K du ressort en fonction de k et L_0.
   (c) Déterminer la pulsation ω_0 des oscillations dans cette approximation.
   (d) Valider l'hypothèse de l'ARQS
3. (a) On revient maintenant au cas général. Quelles sont les conditions aux limites imposées à la fonction $\xi(x,t)$?
   (b) On cherche des solution de la forme $\xi(x,t) = f(x).\cos(\omega t)$. Etablir l'équation dont $f(x)$ est solution. La résoudre (à une constante multiplicative près.)
   (c) Montrer que ω est solution de $\tan(\frac{\omega L}{c}) = \frac{k}{mc\omega}$. Discuter graphiquement les solutions de l'équation.

Commentaire : Un exercice très classique, posé souvent aux écrits (CCP, Centrale, X) et aux oraux. La résolution ici est guidée. Il faut penser à commenter les résultats par rapport au cas du système masse ressort où le ressort est de masse négligeable.

1.8 Réflexion dans une ligne bifilaire idéale.

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance $l.dx$ et d'une capacité γdx.

1. Etablir les deux équations différentielles du premier ordre vérifiées par u(x,t) et i(x,t).
2. Montrer que u(x,t) et i(x,t) sont solutions d'équations de d'Alembert. Quelle est la vitesse de propagation des ondes ?
3. Etablir la relation de dispersion pour une OPPH.
4. Pour une OPPH selon $+\vec{u}_x$, montrer que le rapport $\frac{u}{i}$ est lié à une caractéristique de la ligne nommée impédance de la ligne.

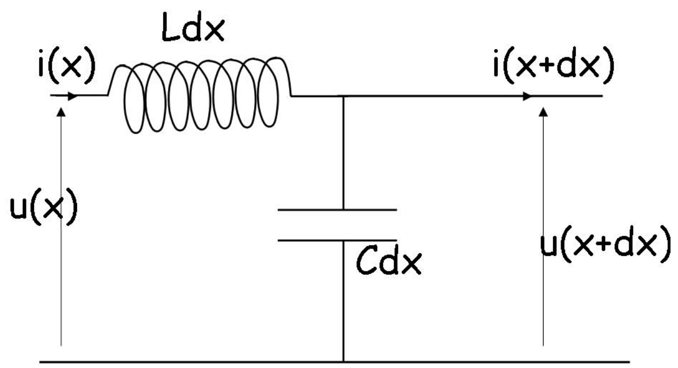

FIGURE 1.3 – Modèle d'une tranche dx de câble coaxial idéal .

5. Dans le cas où cette ligne est semi infinie, fermée en $x = 0$ par un court circuit et qu'une OPPH incidente selon $+\vec{u}_x$ $u_i(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ est émise en $x = -\infty$, calculer $v(x,t)$ et $i(x,t)$ total. Réinterpréter la solution ci dessus en terme d'onde plane.
6. Dans le cas où cette ligne est semi infinie, laissée ouverte en $x = 0$ et qu'une OPPH incidente selon $+\vec{u}_x$ $u_i(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ est émise en $x = -\infty$, calculer $v(x,t)$ et $i(x,t)$ total. Commenter
7. Dans le cas où cette ligne est semi infinie, et en $x = 0$, une résistance de 50Ω, égale à l'impédance de la ligne relie les deux conducteurs de la ligne et qu'une OPPH incidente selon $+\vec{u}_x$ $u_i(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ est émise en $x = -\infty$, calculer $v(x,t)$ et $i(x,t)$ total. Commenter.
8. On image maintenant la ligne finie de longeur L, fermée en $x = 0$ et en $x = L$ par un court circuit. On suppose en outre qu'une OPPH incidente selon $+\vec{u}_x$ $u_i(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a été émise dans la ligne, calculer $v(x,t)$ et $i(x,t)$ total. Commenter. Réinterpréter la solution ci dessus en terme d'onde plane. Proposer une analogie avec un autre dispositif expérimental.

Commentaire :
Le début est un exercice de cours, à maitriser parfaitement. La méthode de résolution en fonction des CL est libre, le plus simple étant de chercher directement en terme OPS puisque l'énoncé suggère à la fin une interprétation en terme d'OPPH. La dernière situation doit elle s'interpréter via une condition de résonance.

Chapitre 2

Dispersion Absorption

2.1 Onde longitudinale dans les solides avec pertes.

On considère une chaîne infinie d'atomes de masse m, séparés par des ressorts de longueur à vide d et de raideur k. La distance entre les atomes au repos est d et la masse le déplacement du $n^{ième}$ atome par rapport à la position d'équilibre est noté $\xi_n(t)$.
Ce modèle permet d'étudier la propagation d'une onde sonore (ou de tout onde de compression, comme les onde sismique P) dans un solide.
En plus de la force de rappel qui s'exerce sur les atomes, on modélise les pertes énergétiques par une force de frottement fluide $\overrightarrow{f}_n = -\alpha \overrightarrow{v}_n$.

1. Justifier le modèle adopté du ressort pour les interactions entre atomes. Discuter le modèle adopté pour les pertes énergétiques mais commenter son intérêt pour le problème de phsyique des ondes.
2. Trouver l'équation vérifiée par $\xi_n(t)$.
3. Faire l'approximation des milieux continus.
   La distance entre deux atomes dans un cristal est de l'ordre de 10^{-10}m, distance très inférieure au longueur d'onde étudiée.
   D'où l'on définie une fonction $\xi(x,t)$ de l'espace et du temps par la relation suivante :
   $\xi(x = nd, t) = \xi_n(t)$.
   Trouver alors que l'équation aux dérivées partielles, appelé équation de propagation, que vérifie $\xi(x,t)$.

   On cherche des solutions de la forme OPPH* : $\xi(x,t) = Re(\underline{\xi}(x,t)$ avec $\underline{\xi}(x,t) = A\exp(j\omega.t - j\underline{k}.x)$.
4. Pourquoi parle t-on de pseudo OPPH ?
5. Trouver alors le lien entre ω et k : la relation de dispersion.
6. Faire un développement limité haute fréquence à l'ordre 0. Commenter. Calculer la vitesse de phase de l'onde, la vitesse de groupe et justifier que ce milieu est alors non dispersif.

7. Faire un développement limité haute fréquence à l'ordre 1. Commenter. Calculer la vitesse de phase de l'onde, la vitesse de groupe.

Commentaire :
Un exercice de cours, à maitriser parfaitement. La résolution en cherchant tout de suite des solutions de la forme OPPH est la méthode de résolution de ces équations aux dérivées partielles. La physique se concentre sur l'étude et l'interprétation de la relation entre* $\underline{k}$ *et* ω *: relation de dispersion. Interpréter le sens de* $\underline{k}$ *en revenant au cas réel fait parti des exigences du programme.*

2.2 La ligne bifilaire réelle.

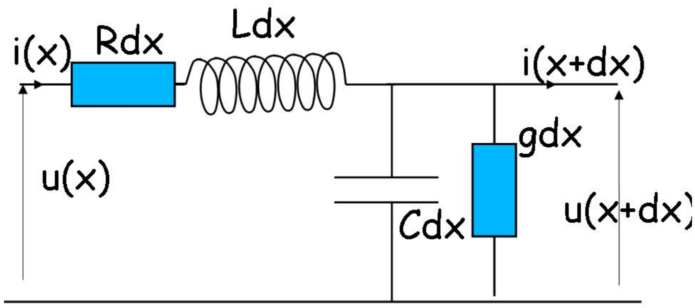

FIGURE 2.1 – Modèle d'une tranche dx d'un câble coaxial réel.

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance $L.dx$ et d'une capacité Cdx. Pour rendre compte des imperfections de la ligne bifilaire, il faut ajouter en série une résistance rdx à l'inductance et une conductance gdx en parallèle du condensateur.

1. Rappeler pourquoi il est possible de travailler sur la tranche d'épaisseur dx dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) alors que le phénomène étudié est un phénomène de propagation.
2. Etablir les équations couplées liant u(x,t) et i(x,t).
3. Etablir l'équation différentielle découplée vérifiée par u(x,t).
4. Etablir la relation de dispersion. Montrer qu'elle est de la forme $k^2 = \omega^2 LC - j\omega(Lg + rC) - rg$. Commenter cette expression dans le cas où $r = 0$ et $g = 0$.
5. Montrer que pour un choix judicieux de r et g, la vitesse de phase et l'amortissement sont indépendant ω. Justifier l'intérêt de ce choix. Calculer alors la vitesse de phase, la vitesse de groupe ainsi qu'une distance caractéristique de l'amortissement

Commentaire :
Un extrait de problème de concours. La mise en équation est classique et la résolution de même. Cependant la recherche de la condition sur r et g est un peu plus difficile, car peu guidée : il faut procéder par identification, i.e. poser $\underline{k} = k' + jk"$ et chercher à identifier les expressions en respectant les contraintes imposées. Chercher une solution sans dispersion est intéressant car il est facile de réamplifier globalement le signal. A noter aussi que ce problème existe sous de nombreuses variantes.

2.3 La corde vibrante qui émet un son.

On étudie le dispositif expérimental de Melde. Cette corde est supposée inextensible, de longueur L, de masse linéïque μ. Elle est tendue entre deux points fixes $x = 0$ et $x = L$ à l'aide d'une masse M accrochée à la corde via une poulie parfaite (extrémité $x = L$). Au repos, la corde est horizontale. On appelle $h(x,t)$ le déplacement transversale d'un morceau de la corde de Melde situé en x à l'instant t. Outre les forces qu'exercent les diverses parties de la corde entre elles, un élément de longueur dx de la corde est soumis en plus à une force de frottement fluide, qui modélise la transmission de l'onde sonore dans l'air : $\overrightarrow{df} = -\alpha dx \frac{\partial h}{\partial t}\overrightarrow{u}_y$.
Cette étude se fera dans l'"approximation des petits mouvements".

1. Trouver l'équation de propagation dont $h(x,t)$ est solution.
2. Etablir la relation de dispersion pour une pseudo onde plane progressive harmonique.
3. On suppose k réel dans cette étude. En déduire alors $\underline{\omega}_1$ et $\underline{\omega}_2$ les deux solutions complexes à exprimer pour $\alpha < 2\mu kc$
4. Chercher la solution du problème comme superposition de deux solutions associées à $\underline{\omega}_1$ et $\underline{\omega}_2$. Déterminer les valeurs de k possibles.
5. Conclure quant à l'influence des frottements sur les modes propres.
6. Que se passerait il si $\alpha > 2\mu\pi c/L$

Commentaire :
Un exercice plus original par son approche car ici et contrairement au cas usuel, c'est le nombe d'onde k qui est réel la pulsation qui est imaginaire comme c'est le cas général pour des ondes stationnaires : on cherche à observer l'amortissement dans le temps et non dans l'espace. Il suffit néanmoins de se laisser guider par l'énoncé.

2.4 Echelle de péroquet : onde de torsion amortie.

On considère une échelle de peroquet constituées de barres accrochées en leur centre par un fil de torsion selon $\vec{u}_z$. Chaque barre est de moment d'inertie J, et ces barres sont séparés par un portion d de fil de torsion (un fil de torsion, appelé aussi ressort de torsion, exerce un couple $\vec{\Gamma} = -C.(\alpha_2 - \alpha_1)\vec{u}_z$ où C est une caractéristique du fil de torsion et α_i les angles entre les deux extrémités du fil et un axe vertical). L'angle de la $n^{ième}$ barre par rapport à la position d'équilibre est noté $\theta_n(t)$.
En plus du couple de rappel, on modélise les pertes par frottement fluide par un couple $-\alpha\frac{d\theta_n}{dt}\overrightarrow{u}_z$

1. Trouver l'équation vérifiée par $\theta_n(t)$.
2. Faire l'approximation des milieux continus.
   On définie une fonction $\theta(z,t)$ de l'espace et du temps par la relation suivante $\theta(z = nd, t) = \theta_n(t)$.

3. Trouver alors la relation de dispersion pour une OPPH.
4. Faire un développement limité haute fréquence à l'ordre le plus bas non nul. Commenter. Calculer la vitesse de phase de l'onde, la vitesse de groupe.

Commentaire :
L'exercice est très proche du cours, sans difficulté.

2.5 La corde vibrante verticale.

On étudie le dispositif expérimental de la corde vibrante mais cette fois la corde, au lieu d'avoir le dispositif horizontal, le dispositif est vertical. La corde est supposée inextensible, de longueur L, de masse linéïque μ. Elle est suspendue par son extrémité supérieure A qui impose un mouvement $z_A(t) = a\cos(\omega t)$, et son extrémité inférieure B est elle libre. Au repos, la corde est verticale. On appelle $h(z,t)$ le déplacement transversale d'un morceau de la corde de Melde situé en z à l'instant t. Cette étude se fera dans l'"approximation des petits mouvements" mais on tient compte de la tension de la pesanteur $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u}_z$ uniforme.

1. Etablir l'expression de la tension T(z) en tout point de la corde.
2. Etablir l'équation aux dérivées partielles dont est solution $h(z,t)$
3. En se plaçant dans les premiers centimètres de la cordes, pour $z << L$, il est possible de remplacer $L-z$ par L dans l'équation aux dérivées partielles. Etablir alors la relation de dispersion. Dégager le sens physique de cette relation de dispersion.

Commentaire :
Un exercice extrait d'un problème des Mines et de Centrale un peu plus original du fait des résultats. On observe une onde amplifiée, phénomène analoge au laser. Il est intéressant de vous poser la question :"d'où vient l'énergie de l'onde ?".

2.6 La corde vibrante extensible.

On étudie le dispositif expérimental de Melde mais comme vous pouvez le constatez sur l'expérience de cours, la corde est plus élastique qu'inextensible (modèle plus plausible pour la corde de guitare mais dont les vibrations sont plus difficilement observables à l'oeil).
On appelle $y(x,t)$ le déplacement transversale d'un morceau de la corde de Melde situé en x à l'instant t.
En tenant donc compte de la raideur K de la corde, l'équation de propagation devient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{K}{\mu}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ est la célérité de l'onde pour une corde inextensible.

1. On cherche des solutions de la forme onde plane progressive de vitesse v $\neq c$ de la forme $y(x,t) = f(u)$ où désigne la variable $u = x - vt$. Etablir l'équation différentielle dont est solution $f(u)$.
2. Quelles sont les solutions physiquement acceptables ? Donner leur forme. Commenter.
3. En supposant la correction apportée faible, déterminer le lien entre ω et k pour des OPPH*. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
4. Commenter et comparer vos résultats des questions 2 et 3.

Commentaire :
Un exercice extrait d'un problème des Mines. Ici la résolution demandée rappelle celle faite pour l'équation de d'Alembert. Il faut se laisser guider par l'énoncé. La troisième question est plus classique, indépendante de la précédente .

2.7 Chaine infinie de pendules pesants.

On considère une chaine infinie de pendules pesants, constitués chacun d'une barre homogène de masse m de longueur l, accrochée en leur extrémité O_i par un fil de torsion selon $\vec{u}_z$. Chaque barre est de moment d'inertie $J = ml^2/3$ autour de l'axe Oz, elle oscille dans le plan O_ixy perpendiculaire au fil de torsion, et les barres sont séparées par un portion d de fil de torsion (un fil de torsion, appelé aussi ressort de torsion, exerce un couple $\vec{\Gamma} = -C.(\alpha_2 - \alpha_1)\vec{u}_z$ où C est une caractéristique du fil de torsion et α_i les angles entre les deux extrémités du fil et un axe vertical). L'angle de la $n^{ième}$ barre par rapport à la position d'équilibre est noté $\theta_n(t)$.

1. Trouver l'équation vérifiée par $\theta_n(t)$.
2. Faire l'approximation des milieux continus.
   On définie une fonction $\theta(z,t)$ de l'espace et du temps par la relation suivante $\theta(z = nd, t) = \theta_n(t)$.
3. Faire l'approximation des petits mouvements.
4. Trouver alors la relation de dispersion pour une OPPH.
   Justifier que la vitesse de l'onde est $c = \sqrt{\frac{3Cd^2}{ml^2}}$.
   On pose par ailleurs $\omega_c^2 = \frac{3g}{2l}$.
   Montrer alors que la relation de dispersion se réécrit :
   $$k^2c^2 = \omega^2 - \omega_c^2$$
5. Etude pour $\omega > \omega_C$.
   Etudier l'onde. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Commenter.
6. Etude pour $\omega < \omega_C$.
   Etudier l'onde. Commenter.

7. Soliton.
   Reprendre l'équation d'onde sans faire l'approximation des petits mouvements. Montrer que $\theta(x,t) = 4.\arctan(\exp(-\frac{q}{\delta}(x-vt))$ est solution de l'équation de propagation générale pour des valeurs de v et δ que l'on déterminera en fonction du paramètre q.
   Représenter la fonction à t=0 et à un instant t quelconque. Commenter.
   Cette onde qui exploite les non linéarités du mouvement pour se propager sans déformation est appelé soliton. Sa forme est ici très intuitive.

Commentaire :
L'exercice est un extrait de concours. L'équation de dispersion obtenue se retrouve souvent en physique (plasma,...) et est appelé équation de dispersion de Klein Gordon. Son étude est donc intéressante car transversale en physique. Par ailleurs l partie soliton bien que calculatoire est intéressante de part le phénomène montré.

2.8 A la limite de l'approximation des milieux continus

Un élastique est réellement constitué d'une chaîne de masses élémentaires m séparées par des ressort de raideur κ et de longueur à vide a. Les seules forces prisent en compte sont les forces de rappel élastique.

1. Etablir la relation décrivant l'élongation u(x,t) de la masse située en x en fonction de l'élongation des masses voisines. (Indication : cette relation relie donc u(x,t), u(x+a,t) et u(x-a,t).)
   On ne souhaite pas faire l'approximation des milieux continus.
2. On cherche des solutions de la forme $u(x,t) = u_0 \cos(\omega t - kx)$ à laquelle on associe $\underline{u}(x,t) = u_0 \exp j(\omega t - kx)$. Etablir la relation de dispersion.
3. Dans quel cas retrouve-t-on une propagation sans déformation ni atténuation.
4. Déterminer la vitesse de phase de cette onde. Commenter.

Commentaire :
L'exercice est un extrait de concours. L'idée de travailler hors de l'approximation des milieux continus est parfois exploitée mais elle ne doit en rien déconcerter. Le cas usuelle se retrouve d'ailleurs par passage à la limite, ce qui est toujours une interprétation riche en physique.