Exercices de Mecanique

⋆ ⋆ ⋆

PC

Philippe Ribière

Année Scolaire 2013-2014

Chapitre 1

Mécanique du Point.

1.1 Accélération subie sur une trajectoire circulaire.

Un homme ne peut pas supporter des accélérations de plus de $10g$=89,1 m.s^{-2}.
Un avion de chasse est lancé à 2500 km/h et reste à vitesse constante tout au long du mouvement. Calculer la place (le rayon) qu'il lui faut dans le ciel pour effectuer un demi tour sur une trajectoire semi-circulaire en conservant la même altitude.
Commentaire :
Un exercice d'oral, simple, sur les coordonnées polaires.

1.2 Le skieur.

Un skieur se trouve au sommet d'une piste faisant un angle $\alpha = 45^{\circ}$ avec l'horizontale et de dénivelée $h = 100m$. A t=0, il part sans vitesse initiale.

1.2.1 Etude sans frottement.

Dans cette partie, l'étude s'effectue sans frottement d'aucune sorte.

1. Que dire de la réaction du support ?
2. Etudier le mouvement lors de la décente.
3. Calculer la vitesse en bas de la pente.

1.2.2 Etude avec une frottement solide.

Dans cette partie, l'étude s'effectue en tenant compte de la force de frottement solide de coefficient f.

1. Rappeler ce qu'est un frottement solide et dans quelle situation précise se trouve-t-on. Rappeler le lien entre la composante tangentielle T (module de $\vec{T}$) et la composante normale N de la réaction du support. Représenter avec soin ces deux composantes sur un schéma.

2. Etudier le mouvement lors de la décente.
3. Calculer la vitesse en bas de la pente.
4. Calculer le travail de la force de frottement solide sur la descente.

FIGURE 1.1 – Quelle est la vitesse atteinte par le skieur ?

1.2.3 Etude avec une frottement solide et fluide.

Dans cette troisième partie, l'étude tient compte du frottement solide de coefficient f et d'un frottement fluide linéaire (ce qui est peu réaliste mais intéressant et surtout plus simple en première approximation) $\vec{f} = -h\vec{v}$.

1. Etudier le mouvement lors de la décente.
2. Calculer la vitesse en bas de la pente.

1.2.4 Etude des records de descente.

Dans cette quatrième et dernière partie, l'étude ne tient plus compte du frottement solide mais d'un frottement fluide quadratique (ce qui est plus réaliste) $\vec{f} = -\frac{1}{2}Cv\vec{v}$. Par contre la force de frottement solide est ici négligée.

1. Calculer la vitesse limite atteinte après le régime transitoire. Estimer le coefficient C de manière à obtenir un résultat cohérent avec le record du monde de vitesse de descente à ski, qui avoisine les 250km/h.
2. Trouver l'équation différentielle vérifée par la vitesse.
3. Résoudre cette équation différentielle.

Commentaire :
Un exercice simple, sauf la quatrième partie, où si la mise en équation est classique, la résolution l'est moins.

1.3 Ressort sur un plan incliné.

Un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 est accroché à la partie inférieure d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. La masse m, accrochée à l'extrémité supérieure du ressort, est soumise à une force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$. Le ressort est, à t=0, allongée d'une longueur a et lâchée sans vitesse initiale.

1. Calculer la longueur à l'équilibre du ressort.
2. Obtenir l'équation différentielle du mouvement de la masse autour de la position d'équilibre.
3. En négligeant les frottements, résoudre cette équation. Commenter.
4. En négligeant toujours les frottements, faire l'étude énergétique. On prendra dans cette étude la référence des énergies potentielles à l'équilibre. Commenter l'intérêt de l'étude énergétique.
5. Les frottements avec l'air sont faibles de telle sorte de que le facteur de qualité est très grand $Q \simeq 100$. Donner alors la solution. (Vous ferez les approximations qui s'imposent).

Commentaire :
Un exercice très classique sur la mise en équation d'un système masse-ressort.

1.4 Voiture au sommet d'une colline.

Une voiture qui roule à vitesse constante arrive au sommet d'une colline modélisée par un arc de cercle de rayon R et d'ouverture angulaire 2α . Quelle est la condition sur la vitesse pour éviter que la voiture ne décolle ? *Commentaire :*
Un exercice d'oral, peut-être déroutant par sa mise en forme mais sa mise en équation reste classique. Le contact est rompu quand la réaction de contact s'annule.

1.5 Création de vagues.

Pour créer des vagues dans une piscine, on fait effectuer des oscillations verticales à un gros corps de masse M immergé. Ce corps de masse volumique ρ et de volume $V = h^3$ est plongé dans l'eau de masse volumique ρ_{eau} et suspendu à un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0, accroché en un point A. Soit R le référentiel terrestre supposé galiléen.

1. Ecrire la condition d'équilibre du corps de masse M.
2. On s'intéresse au mouvement vertical du corps et on note z la cote de son centre de gravité G suivant un axe vertical orienté vers le bas, en prenant pour origine la position d'équilibre. Ecrire l'équation différentielle déterminant z en fonction du temps t. Donner la pulsation propre ω_0 de cet oscillateur. On négligera les frottements dans cette question.
3. On tient compte désormais d'une force de frottement visqueux, colinéaire à la vitesse et d'intensité $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, exercée par l'eau sur le corps. Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par z(t). En se plaçant dans le cas d'un amortissement faible, donner sans calcul l'allure du graphe de z(t) pour les conditions initiales suivantes : à t = 0, z = $z_1 > 0$ et la vitesse initiale est nulle.

4. A l'aide d'un piston, on impose à l'extrémité A du ressort, un mouvement vertical sinusoïdal selon $z_A(t) = Z_{Am}cos(\omega t)$ centré sur la position de A précédente. Exprimer la tension du ressort en fonction de z, z_A, k, h et L_0. Ecrire dans le référentiel R l'équation différentielle vérifiée par z(t).
5. Calculer l'amplitude Z_m des oscillations du corps. On utilisera la notation complexe et on fera apparaître les constantes ω_0, Q et la variable x = ω/ω_0.
6. Dans ce dispositif, l'intérêt du ressort est de permettre d'obtenir des oscillations du corps d'amplitude Z_m supérieure à celle Z_{Am} de l'excitation. On veut que $Z_m > 3Z_{Am}$. A quelle condition approximative (on ne demande pas la condition précise) sur Q existe-t-il des valeurs de ω pour lesquelles $Z_m > 3Z_{Am}$?
7. Si Q = 4, dans quel intervalle doit se trouver ω pour que $Z_m > 3Z_{Am}$?

Commentaire :
Cet exercice, extrait d'un problème de concours, permet de vérifier sa bonne maitrise du régime sinusoidal forcé. Il est complet et donc idéal pour des révisions sur le sujet.

1.6 Comète de Halley.

La comète de Halley à une période de révolution de 76,03 années autour du soleil. La périhélie de la trajectoire est de 0,59UA. Sachant qu'une Unité Astronomique est la longueur du demi grand axe de la trajectoire elliptique de la terre autour du soleil, calculer en UA la longueur du demi grand axe de la trajectoire elliptique de la comète autour du soleil, l'aphélie de sa trajectoire et finalement l'excentricité de la trajectoire de la comète.
Commentaire :
Cet exercice d'oral est très simple mais il révèle l'intérêt pour l'astrophysique de la troisième loi de Kepler.

1.7 Etude de trajectoire d'un satellite terrestre.

Un satellite de masse m est observé depuis la terre, de centre O et de rayon R_T. On notera $k = GM_T$ et C la constante des aires.
A un instant pris comme origine des temps, le satellite est à la distance r_0 et de vitesse v_0, et tel que $\overrightarrow{OS}_0 \wedge \vec{v}_0 \neq 0$ Le référentiel géocentrique, lié au centre de la terre est supposé galiléen.

1. Exprimer la force $\vec{F}$, ainsi que l'énergie potentielle $E_P(r)$. Que dire des caractéristiques de cette force.
2. Montrer que la trajectoire du satellite est plane, préciser ce plan et expliquer où l'hypothèse $\overrightarrow{OS}_0 \wedge \vec{v}_0 \neq 0$ intervient dans le raisonnement.
3. Montrer que les deux grandeurs cinématiques r et θ qui décrivent le mouvement dans le plan sont liées. On déterminera la constante des aires C en fonction de la valeur du moment cinétique initiale.

4. Justifier alors l'intérêt de l'étude énergétique.
5. Retrouver l'expression de l'énergie potentielle efficace et justifier son intérêt par une étude graphique. On discutera les diverses trajectoires possibles en fonction de la valeur de l'énergie mécanique initiale.

6. La trajectoire est supposée circulaire de rayon r_0. Donner l'expression de v_0^c la vitesse sur cette trajectoire circulaire.
7. Si le satellite étudié est Météosat, satellite géostationnaire de météorologie, calculer son altitude.
8. Exprimer l'énergie mécanique E_m^c de ce satellite en orbite circulaire. Comparer à E_p^c et E_c^c.

   De manière plus réaliste, la sonde possède une trajectoire elliptique, de foyer O, d'équation polaire $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, de paramètre p et d'excentricité e.
   On suppose en outre qu'à l'instant $t = 0$, la vitesse est orthoradiale de module v_0 .
9. Que dire de e et de E_m ?
10. Dessiner l'allure de la trajectoire elliptique en précisant bien où est la terre et où se situe le satellite à $t = 0$.
11. Dans le cas ci dessus, donner l'expression de $r_{aphelie}$ et $r_{perihelie}$. Placer les sur le dessin précédent.
12. Calculer la longueur a du demi grand axe de l'ellipse.

D'après concours.
Commentaire :
L'approche proposée dans ce sujet de concours est très proche de celle du cours, toutes les idées y sont réexploitées. Il s'agit donc d'un très bonne exercice de révision sur le sujet.

1.8 Mouvement d'une comète.

La terre T décrit autour du soleil S une trajectoire quasi circulaire de centre S de rayon r_0.
On s'intéresse en outre à une comète de masse m. On la suppose soumise uniquement à l'attraction du soleil. Cette comète possède une trajectoire dont l'équation est une conique $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$.

1. Que représente S pour la conique ?
2. Calculer v_0 la vitesse de la terre sur son orbite circulaire.
3. Sachant que la comète vient de l'infini, quelles trajectoires sont envisageables ? Que dire de e ?
   La comète passe au plus près du soleil avec une vitesse $v = 2.v_0$ à la distance $r = \frac{r_0}{2}$.
4. La vitesse $2.v_0$ représente-elle la vitesse minimale ou maximale, sur la trajectoire.
5. Calculer l'énergie E_M de la comète.
6. Préciser la trajectoire de la comète : en particulier, préciser la valeur de e et p. Dessiner son allure.

7. Montrer que les deux points où la comète risque d'entrer en collision avec la terre sont diamétralement opposés sur l'orbite terrestre.
8. Discuter de la validité de l'hypothèse " On suppose la comète soumise uniquement à l'attraction du soleil."

D'après concours.
Commentaire :
Cet énoncé est rédigé de manière très moderne. Aucune démonstration sur les coniques n'est éxigée mais les connaissances exigibles sont à exploiter, les calculs se font sur la très classique trajectoire circulaire.

1.9 Mouvement d'une masse accrochée à un ressort

Un ressort horizontal (k, l_0) est fixé en un point 0 d'une table. A l'autre extrémité de ce ressort, un objet ponctuelle M de masse m est alors accroché. Cette masse se déplace sans frottement, ni avec la table, ni avec l'air. Partant d'une position $r_0 = l_0 + a$, la masse est lancée avec une vitesse orthoradiale.

1. Que permet de conclure le fait qu'il n'existe pas de frottement entre la table et l'objet ? Calculer la norme de la force de réaction du support.
2. Montrer la conservation du moment cinétique $\vec{\sigma}_0(M)$ du point M par rapport au point O. Commenter. Calculer $\vec{\sigma}_0(M)$ en fonction des conditions initiales.
3. Quelles conclusions faites vous de cette loi de conservation ?
4. Justifier alors l'intérêt de l'étude énergétique.
5. Déterminer l'énergie mécanique E_m du point M en la mettant sous la forme suivante : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{P\ eff}$ en précisant la valeur de $E_{P\ eff}$ en fonction de $\sigma_0(M)$.
6. Tracer l'allure de $E_{P\ eff}$ et montrer que le mouvement radial est compris entre deux valeurs r_1 et r_2 que vous ferez apparaître sur le graphique.
7. Que pouvez vous dire de la vitesse quand $r = r_1$ ou r_2 ?
8. Si les conditions initiales deviennent $r_0 = l_0 + a$, la masse lancée avec une vitesse radiale, calculer $\vec{\sigma}_0(M)$. Quelle est alors la nature du mouvement de la masse ?

D'après concours.
Commentaire :
Un très très beau problème. Il faut réexploiter tous les résultats vu en cours dans une situation différente : la force est centrale, conservative mais non newtonnienne. Un excellent problème de révision à la fois sur les ressorts et sur le mouvement à force centrale.

1.10 Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène.

Un atome d'hydrogène est constitué d'un électron, de charge -e= $-1{,}6.10^{-19}C$, de masse m= $0{,}9.10^{30}kg$ et d'un proton de charge e. L'étude du mouvement de l'électron va être menée de manière classique, dans le référentiel lié au noyau (le proton) supposé galiléen. (Ce modèle classique est appelé modèle planétaire de l'atome). On suppose en outre que la trajectoire de l'électron est circulaire.

1. Exprimer la force du proton sur l'électron, que dire de cette force ? (Rappel : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^{-9}SI$)
2. Montrer que le moment cinétique est constant.
3. Montrer que l'énergie mécanique est constante.
   Si une grandeur est conservée en mécanique classique, alors elle est quantifiée en mécanique quantique. Bohr proposa la quantification du moment cinétique suivante pour en déduire les autres quantifications. Supposons donc que :
   $$||\vec{L}_n|| = n\hbar$$
   où $\hbar = 1{,}055.10^{-34} J.s$ est une constante fondamentale de la mécanique quantique, appelée constante de Planck.
4. Déterminer la vitesse v_n en fonction de n. Calculer la vitesse introduite. Commenter.
5. Déterminer le rayon a_n de la trajectoire en fonction de n. Calculer le rayon introduit. Commenter.
6. Déterminer l'énergie mécanique E_n en fonction de n. Calculer l'énergie introduite. Commenter.
7. Une particule chargée qui accélère émet des rayons X, par Brehmstrahlung. Ce procédé est d'ailleurs mis à profit dans les synchrotrons tel Soleil pour obtenir des rayons X et faire de la cristalographie par exemple. Cet effet peut etre compris en ajoutant une force de frottement fluide faible à l'atome. La trajectoire reste donc quasi circulaire, l'effet de la force de frottement ne se faisant pas sentir sur un tour mais sur plusieurs. Comment évolue E ? En déduire l'évolution de l'énergie potentielle E_p et donc de r ? En déduire aussi l'évolution de E_c et donc de v ? Qu'adviendrait-il au final de l'électron ?

D'après concours.
Commentaire :
Un exercice très classique et très riche du point de vue de l'histoire des sciences. En effet, après l'expérience de Rutherford, Bohr propose un modèle "planétaire" pour l'atome d'hydrogène avec un mouvement dans un champ de force central conservatif et il s'intéresse à la trajectoire circulaire. Et dans ce modèle le plus simple possible, il introduit de manière naturelle (et géniale) la quantification de l'atome. Il parvient alors à retrouver le spectre de l'atome d'hydrogène, ce qui lui faut immédiatement un fort succès. Il est fort intéressant de remarquer que toutes les grandeurs conservées en mécanique classique deviennent quantifiées en mécanique quantique. Le caractère elliptique de la trajectoire est pris en compte le développement de Sommerfeld mais comme vous le savez, il sera impossible de généraliser aux autres atomes et il faut enssuite passer par l'équation de Schrodinger. Néanmoins, grâce à ce modèle, la mécanique quantique est née.

1.11 Deux masses reliés par un ressort.

On considère deux palets autoporteurs, identiques, de masse m, reliés par un ressort (k,l_0) sur une table horizontale. On néglige les forces de frottement fluide.
O désigne le point milieu des deux masses et initialement, à t=0, les masses sont telles que : $\vec{OM_1}(t=0) = \frac{-l_0-D}{2}\vec{u}_x$, $\vec{OM_2}(t=0) = \frac{l_0+D}{2}\vec{u}_x$, $\vec{v}_1(t=0) = \vec{0}$, $\vec{v}_2(t=0) = \vec{0}$.

1. Décrire le mouvement d'ensemble i.e.le mouvement du centre de masse G, du système ?
2. Etudier le mouvement relatif des masses à l'aide du point fictif.

Commentaire :
Un exercice d'oral simple mais complet sur le problème à deux corps. Penser à bien distinguer les forces intérieures et extérieures.

1.12 Etude d'un système d'étoile double.

Considérons deux étoiles ponctuelles formant un système binaire, de masse m_1 et m_2. Ces étoiles ne sont soumises qu'à leur force d'interaction gravitationelle mutuelle et C désigne le centre de masse du système. Les étoiles décrivent des trajectoires circulaires de centre C de rayon R_1 et R_2. d désigne la distance $r_1 + r_2$.

1. Que dire du référentiel du centre de masse R* ?
2. Justifier que les deux étoiles ont même période de révolution.
3. Montrer alors que $\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_2}{m_1}$
4. Montrer que la période T de révolution est donné par $T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G(m_1+m_2)}}$.

Commentaire :
Un exercice d'oral qui mèle trajectoire circulaire (sur un mouvement à force centrale) et problème à deux corps.

1.13 Etude de l'équilibre relatif du pendule.

Un enfant s'amuse avec un pendule. Le TGV est supposé accéléré $\vec{a}_0 = a_0\vec{u}_x$. On suppose là encore le référentiel terrestre R galiléen.

1. Trouver l'angle d'équilibre via le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel R' du train.
2. Déterminer l'angle d'inclinaison θ_{eq} du fil à l'équilibre dans le train.
   L'équilibre décrit ici est appelé équilibre relatif puisqu'il fait référence à un état d'équilibre dans le référentiel relatif R'.
3. Justifier pour l'étude du mouvement l'intérêt d'utiliser le théorème du moment cinétique. Refaire l'étude via ce théorème.
4. Que dire de l'étude énergétique.
5. En écartant le pendule de sa position d'équilibre θ_{eq}, on observe des petites oscillations. Sans calcul,que dire de ces oscillations ?
6. A l'aide d'un développement limité, déterminer la période T des oscillations dans le référentiel R'.
   On introduira $u = \theta - \theta_{eq}$

Commentaires :
Un grand classique sur les équilibres relatifs, rédigé ici de manière complète. La dernière question n'est pas difficile mais uniquement calculatoire.

1.14 Anneau sur une barre tournante inclinée.

Dans tout l'exercice, on suppose le référentiel terrestre R galiléen.
Une barre métallique de longueur l, que l'on confondra avec l'axe $\vec{u}_X$, fait avec l'axe Oz verticale un angle α. Cette barre est en rotation uniforme autour de l'axe Oz vertical, , à la vitesse angulaire $\Omega \vec{u}_z$, O désignant son extrémité basse. Sur cette barre, un anneau glisse sans frottement, il est donc astreint à se déplacer suivant l'axe de la barre.

1. Justifier avec soin l'intérêt d'une étude énergétique.
2. Déterminer les positions d'équilibre relatif ainsi que leur stabilité
3. Sans calcul, que dire des petits mouvements autour de la position d'équilibre ?
4. Calculer la période T de ces petits mouvements

Commentaires :

1. *Dans le cas d'un référentiel R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel R galiléen, il faut être en mesure d'énoncer les forces d'inertie et se souvenir que l'étude énergétique est facilitée par le fait que la force d'inertie d'entrainement dérive d'une énergie potentielle.*
2. *Cet exercice rappelle l'intérêt de l'étude énergétique pour l'étude des positions d'équilibre.*
3. *L'équilibre de l'anneau est dit relatif car l'anneau reste un mouvement dans R. Il n'est immobile que dans R'.*

1.15 Force de marée

Les forces de marées sont un effet dû au caractère non galiléen du référentiel géocentrique.
La lune est supposée en mouvement dans le plan équatorial de la terre. On s'intéresse à un objet ponctuel de masse m à la surface de la terre à l'équateur. On s'intéresse au terme de marée dû à la lune et au soleil. On note D la distance Terre Lune et R_T le rayon de la terre. L'hypothèse de départ est que le référentiel héliocentrique est supposé galiléen. On note $\vec{g}_A(M)$ le champ de gravitation exercée par l'astre A (A= la lune L, la terre T ou le soleil S) au point M. $\vec{g}_A(M) = G\frac{M_A}{D_A^2}\vec{u}_{A\to M}$.

1. Décrire le mouvement du référentiel R' géocentrique par rapport au référentiel R héliocentrique.
2. Donner alors l'expression du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel géocentrique R'. (N'oubliez par de tenir compte de l'interaction de la terre T, de la lune L et du soleil S).
3. En appliquant le théorème de la résultante dynamique dans le référentiel héliocentrique R, exprimer $\vec{a}_{T/R}$.

4. En remplaçant $\vec{a}_{T/R}$ dans l'expression de la question 2, regrouper les termes similaires : le terme de marée apparaît alors. Justifier le qualificatif de "terme différentiel".
5. L'objet M étudié est supposé en M_1, dans le plan équatorial, dans l'alignement de l'axe terre lune, à la surface de la terre proche de la lune. Effectuer un DL de l'expression obtenue en R_T/D et montrer que le terme de la lune $\delta_L(M) = -G\frac{2.R_T.M_L}{D^3}\vec{u}$.
6. Sans calcul, reprendre l'étude pour M_2, dans le plan équatorial, dans l'alignement de l'axe terre lune, mais le plus loin de la lune (diamètralement opposé à M_1).
7. Compte tenu de cette expression, dessiner l'allure des bourrelets océaniques.
8. Justifier que les marées hautes et basses sont séparées de 6h environ.
9. Justifier le rôle prédominant de la lune par rapport au soleil dans les phénomènes de marée.
10. Proposer un critère qualitatif pour supposer le référentiel géocentrique galiléen. (Comme par exemple lorsque l'on étudie le mouvement d'un satellite autour de la terre.)

Commentaire :
Un extrait de concours sur les forces de marées, problème un peu difficile mais ô combien intéressant. Le problème est bien posé et directif ce qui le rend très abordable.

1.16 Définition du poids, déviation vers l'est

La définition du poids, à partir du fil à plomb tient compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre , via la force d'inertie d'entrainement.
La déviation vers l'est ou le pendule de Foucault rendent compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre, mais cette fois via la force d'inertie de Coriolis. On s'intéresse à la dynamique dans le référentiel R' terrestre. On suppose le référentiel R géocentrique galiléen.
Décrire le mouvement de R' par rapport à R.
Faire un grand schéma avec la latitude λ. Definir la vitesse de rotation de la terre dans R' :$\Omega = \frac{2\pi}{T}$. Quelle est sa direction ?

1.16.1 Etude du cas statique : définition du poids.

Dans cette exercice, on ne fera pas intervenir le poids (puisque l'on cherche à le définir) mais la force gravitationnelle calculée en un point de la surface de la terre.

1. Ecrire les équation du mouvement d'un pendule de masse m accroché à un fil de masse négligeable de longueur l dans le terrestre R' en supposant le référentiel R géocentrique galiléen.

2. On s'intéresse à l'équilibre de ce pendule. Simplifier les équations précédentes. La résultante des forces est elle dirigée vers le centre la terre ? faire un dessin représentant les forces pour un français, un équatorien et un ours polaire.

1.16.2 Etude du cas dynamique : chute libre et déviation vers l'Est.

Dans cette partie, on s'intéresse à la chute libre d'un objet de masse m sans frottement. (Maintenant que le poids est défini, il est possible de l'utiliser.)

1. Faire un bilan des forces.
2. Comparer le module de la force de Coriolis au poids.
3. Etudier le mouvement de chute libre à l'ordre 0, en ne considérant que le poids.
4. Etudier le mouvement de chute libre à l'ordre 1, en utilisant pour expression de la vitesse relative dans $\vec{f}_{i.c.}$, celle obtenue à l'ordre 0. Evaluer la déviation par rapport à la verticale du point d'impact. Commenter.

Commentaire :
La première partie est une partie du cours de première année et la seconde, sur l'expérience de Reich, un classique du genre.

1.17 Données.

constante gravitationnelle $G = G = 6,674\ 28(67) \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}
perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$
la permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8,854187.10^{-12}$ A.s.V^{-1}.m^{-1}
la vitesse de la lumière dans le vide est notée c (valeur exacte recommandée depuis 1975, devenue exacte par définition depuis 1983) : c = 299 792 458 mètres par seconde

Données de la terre :
$R_{orbite\ terrestre}$ = 149597887 km= 1 u.a.. ou demi grand axe 149597870 km.
$e = 0,01671022$.
v = 29,783 km/s.
R_T = 6378,14 km.
M_T = 5,9736 $\times 10^{24}$ kg.
ρ = 5,515.10^3 kg/m^3.
g_0 = 9,806 m/s^{-2} à latitude 45°, g_0 = 9,780 m/s^{-2} à latitude 0°, g_0 = 9,832 m/s^{-2} à latitude 90°.

Données du soleil :
Distance au centre de la galaxie. (Voie lactée) 2,50.10^{17} km=8 700 pc.
période galactique : 2,26.10^8 années soit une vitesse de 217 km/s.
R_S = 1392000 km.
M_S = 1,9891.10^{30} kg.

Données sur la lune :
Demi grand axe 384400 km, périgée 363300 km, apogée 405500 km.
$e = 0,05490$.
T = 29,530588 jours. (Période synodique, par rapport au soleil, i.e. les phases de la lune).

$R_L = 3474{,}6$ km.
$M_L = 7{,}34.10^{22}$ kg.
$\rho_L = 3{,}344.10^3$ kg/m^3.
$g_0 = 1{,}62$ m/s^2.

Atome :
Constante de Plank $h = 6,62606896 \times 10^{-34} J.s$
l'énergie d'un photon à sa fréquence ν $E = h\ \nu$
masse de l'électron m=$9,1093826(16).10^{-31} kg$
charge de l'électron $e = 1,60217653(14).10^{-19} C$
rayon de l'atome de Bohr $a_0 \ = \ 52,917\ 720\ 859\,(36) pm$

Chapitre 2

Mécanique du solide.

2.1 Roue qui descend sur plan incliné.

Une roue de rayon R, de masse M et de moment d'inertie par rapport à son axe $J = \frac{1}{2}MR^2$ est placée au sommet d'un plan incliné d'angle α avec l'horizontale. La roue est posée immobile. Le coefficient de frottement solide entre la roue et le sol est noté f.

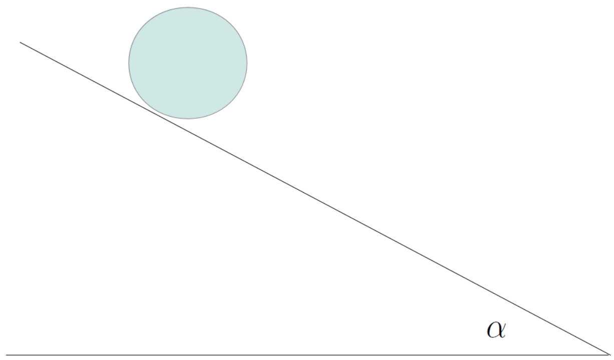

FIGURE 2.1 – Roue qui descend sur plan incliné.

1. On suppose que la roule sans glisser. Calculer la vitesse de rotation et de translation sur le plan incliné.
2. Vérifier l'hypothèse faite.
3. Que penser d'une approche énergétique ?
4. Que se passerait-il si le coefficient de frottement solide était nul ?

Commentaire :
Un exercice de cours à maitriser parfaitement. La mise en place du problème et sa résolution (hypothèse, vérification de l'hypothèse) doivent être faites très proprement.

2.2 Bille qui remonte sur plan incliné.

Une bille de rayon R, de masse M et de moment d'inertie $J = \frac{2}{5}MR^2$ est placée au bas d'un plan incliné d'angle α avec l'horizontale. La bille a initialement un mouvement de roulement sans glissement de vitesse de translation v_0. Le coefficient de frottement solide entre la roue et le sol est noté f.

1. Calculer la vitesse de rotation initiale Ω_0.
2. Calculer la vitesse de rotation et de translation sur le plan incliné.
3. Vérifier l'hypothèse faite.
4. Que penser d'une approche énergétique ?
5. Que se passerait-il si le coefficient de frottement solide était nul ?

Commentaire :
Un exercice très proche de celui précédent pour vérifier la bonne maitrise des connaissances fondamentales sur un sujet quelque peu différent. L'interprétation énergétique doit être claire, dans sa démarche et dans les conclusions.

2.3 Roue qui patine.

Une roue de vélo de rayon R, de masse M et de moment d'inertie par rapport à son axe $J = MR^2$ est placée sur un plan horizontal. La roue a initialement un mouvement de rotation autour d'un axe propre de vitesse ω_0 mais une vitesse de translation nulle. Le coefficient de frottement solide entre la roue et le sol est noté f.

1. Calculer la vitesse de glissement initiale. Justifier que le mouvement s'effectue au moins au début avec glissement.
2. Calculer la vitesse de rotation et de translation de la roue.
3. Vérifier l'hypothèse faite. A quelle date s'arrête le glissement ?
4. Pourquoi faire ainsi patiner les roues crée une usure prématurée du pneu ?
5. Que dire du mouvement ultérieur ?
6. Que se passerait-il si le coefficient de frottement solide était nul ?

Commentaire :
Un exercice de cours, tombé à divers oraux, avec cette fois ci l'étude du mouvement sous l'hypothèse du glissement. L'étude montre aussi le passage du glissement au non glissement.

2.4 Effet rétro.

Une boule de billard, de rayon R, de masse m et de moment d'inertie par rapport à son axe $J = \frac{2}{5}mR^2$ est placée sur un plan horizontal. La roue a initialement un mouvement de rotation autour d'un axe propre de vitesse $\omega_0 = \alpha\frac{v_0}{R}$ où α désigne un nombre sans dimension et une vitesse de translation v_0 selon $\vec{u}_x$. Le coefficient de frottement solide entre la boule de billard et le tapis de billard est noté f.

1. Qualitativement, quel doit être le sens de rotation de la boule pour obtenir à terme un effet rétro (la balle intialement en mouvement suivant $\vec{u}_x$ revient en se déplaçant suivant $-\vec{u}_x$)
2. Calculer la vitesse de glissement initiale. Justifier que le mouvement s'effectue au moins au début avec glissement.
3. Calculer la vitesse de rotation et de translation de la roue lors de la première phase du mouvement selon $\vec{u}_x$. A quelle date s'arrête le glissement ? Quelle est alors la distance parcourue ?
4. Que dire du mouvement ultérieur ? Justifier que l'effet rétro se produit si et seulement si $\omega_0 > \frac{5.v_0}{2.R}$
5. Que se passerait-il si le coefficient de frottement solide était nul ?

Commentaire :
Un exercice classique, extrait de divers oraux, avec l'étude dans l'hypothèse du glissement. L'étude montre aussi le passage du glissement au non glissement.

2.5 Le vélo.

Un vélo se déplaçant $\vec{u}_x$ selon est modélisé par trois éléments comme tel :

1. Le cadre et le cycliste de masse M sont modélisés par une barre homogène de longueur 2a, d'extrémité C_1 et C_2. (Le centre de gravité G du cycliste est donc entre les deux roues, au milieu de $[C_1, C_2]$ ce qui est peu réaliste mais qui ne modifie pas les résultats de l'étude.) Le mouvement est paramétré par $x(t)$.
2. La roue arrière de masse m, de centre C_1, de moment d'inertie $J = mR^2/2$ autour de C_1y, sur laquelle le cycliste peut exercer un couple $\Gamma\vec{u}_y$. Son mouvement est paramétré par l'angle φ_1 dans le référentiel R*.
3. La roue avant de masse m, de centre C_2, de moment d'inertie $J = mR^2/2$ autour de C_2y. Son mouvement est paramétré par l'angle φ_1 dans le référentiel R*.

Le coefficient de frottement solide entre la roue et la route est noté f. Le vélo est initialement immobile.

1. Après avoir dénombrer proprement le nombre d'inconnues du problème, étudier le mouvement en supposant le roulement sans glissement. Montrer que $\ddot{x} = \frac{\Gamma}{(M+3m)R}$.
2. Vérifier la condition de roulement sans glissement des roues.
3. Comment interpréter le fait que le vélo se mette en mouvement ? Quelle est le rôle des forces intérieures qu'exerce le cycliste ? Quel est le rôle des forces de frottement solide ?
4. Reprendre l'étude dans le cas du roulement avec glissement.

Commentaire :
Un exercice plus complet, qui s'inspire de nombreux problèmes sur les véhicules à moteur, et dont l'interprétation nécessite une bonne compréhension de la mécanique du solide. En effet le cycliste exerce des forces intérieures, qui n'interviennent donc pas dans le TRD, ce qui peut paraître paradoxale, puisqu'intuiviment, ce sont ces forces qui génèrent le mouvement. Mais les forces de frottement qui s'exercent sur les roues et s'opposent au glissement sont essentielles, et il est possible de le comprendre en imaginant un cycliste sur la glace.

2.6 Pendule pesant.

Une barre mince homogène de longueur L, de masse m, de moment d'inertie par rapport à un axe passant par une extrémité $J = \frac{1}{3}mL^2$, et de moment d'inertie par rapport à un axe passant par son centre de gravité G $J = \frac{1}{12}mL^2$, est accrochée au plafond via une liaison rotule parfaite de centre O. Cette tige est lâchée à un instant pris comme origine des temps sans vitesse initiale, en étant écartée de la verticale d'un angle α. On néglige les frottements avec l'air.

1. Que signifie "liaison rotule parfaite de centre O" ? Quelles conséquences cela a-t-il ?
2. Etudier le mouvement de la tige. Commenter.
3. Quelle serait la nature du mouvement en présence de frottement fluide ? Quelle critère adopter pour justifier que ces derniers sont négligeables ?
4. Reprendre l'étude du mouvement par une approche énergétique.

Commentaire :
Un exercice de cours à maitriser parfaitement.

2.7 Pendule articulé.

Un cylindre homogène plein de rayon R, de masse m, de centre d'inertie G, et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mR^2$ autour de l'axe Gz, est relié par une liaison pivot parfait à une tige de longueur a et de masse négligeable. Cette tige est fixée au plafond par une liaison pivot parfait en O.
Etudier le mouvement du pendule. Comparer vos résultats à ceux obtenus sur une masse ponctuelle.
Reprendre l'étude en supposant le cylindre, non pas lié par la tige par une liaison pivot parfaite, mais fixé solidairement à la tige.
Commentaire :
Un exercice classique sur un oscillateur. Il faut se demander dans quel cas le cylindre est en rotation dans R.*

2.8 Oscillateur à ressort.

Un cylindre homogène plein de rayon R, de masse m, de centre d'inertie G, et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mR^2$ autour de l'axe Gz, est relié par une liaison pivot parfait à un ressort de raideur k et de

longueur à vide l_0. L'autre extrémité de ce ressort est fixée à un mur vertical en O. Le cylindre est posé sur une table horizontale.
Le coefficient de frottement solide entre la bille et la table est f. Aucune autre force de frottement, en particulier avec l'air n'est prise en compte.
Etudier le mouvement sachant que le cylindre est écarté de sa position d'équilibre de a et lâché sans vitesse initiale.
Commentaire :
Un exercice classique sur un oscillateur, qui se rapproche des exercices posés en 1er année mais avec une composante mécanique du solide. Il faut faire l'hypothèse du roulement sans glissement. Il faut aussi penser à l'approche énergétique.

2.9 Le problème de l'échelle statique.

Une échelle AB de masse m, assimilée à une barre homogène de longueur L, est appuyé contre un mur rugueux et vertical, le sol est lui plan. Le coefficient de frottement entre l'extrémité haute A de l'échelle et le mur rugueux est f_v.
Déterminer le coefficient de frottement f_h entre l'extrémité basse B de l'échelle et le sol sachant que l'angle d'inclinaison maximal de l'échelle avec le sol est $\alpha_m ax$.
Commentaire :
Un exercice très classique de statique du solide, qui tombe fréquemment à l'oral.

2.10 Couteau immobile sur un bol.

Un couteau métallique de masse m, assimilée à une barre homogène de longueur L, est posé sur les bords supérieurs d'un bol de rayon R avec $2R < L$ et de telle sorte que le couteau dépasse de part et d'autre du bol.
Déterminer les deux réactions du bol sur la tige.
Commentaire :
Un exercice d'oral, de statique du solide, sans difficulté.

2.11 Petite bille sur une grande bille.

Un grande bille de centre O et de rayon R est immobile. A son sommet est placé une petite bille de centre G de rayon r et elle roule sans glisser sur la grande bille. La rotation du centre de gravité G de la petite bille est repérée par un angle $\theta(t)$ et la rotation de la petite bille sur elle même est repérée par l'angle $\varphi(t)$, ces deux angles étant pris par rapport à un axe fixe Ox dans R. Le moment d'inertie de la petite bille est $J = \frac{2}{5}mr^2$ autour de l'axe Gz Le coefficient de frottement solide entre les deux billes est noté f.

1. Etudier le mouvement de la petite bille
2. Calculer l'angle de décollement de la petite bille θ_d sur la grande bille.

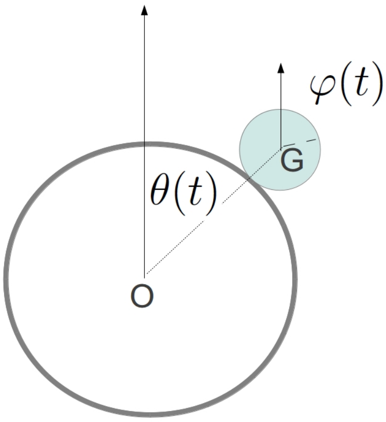

FIGURE 2.2 – Petite bille sur une grande bille.

3. La petite bille roule-t-elle sans glisser jusqu'à son décollement ?

Commentaire :
Un exercice d'oral très classique. Le paramétrage par deux angles ne doit pas surprendre. La conclusion de la dernière question ne doit pas surprendre mais au contraire invite au commentaire.

2.12 Petite bille dans une grande bille.

Un grande bille creuse de centre O et de rayon R est immobile. Une petite bille de centre G de rayon r est libre de se déplacer à l'intérieure de la grande bille creuse. On supposera qu'elle roule sans glisser dans la grande bille. La rotation du centre de gravité G de la petite bille est repérée par un angle $\theta(t)$ et la rotation de la petite bille sur elle même est repérée par l'angle $\varphi(t)$, ces deux angles étant pris par rapport à un axe fixe vertical dans R, avec pour condition initiale $\theta(t=0)=\theta_0$, $\dot{\theta}(t=0)=0$, $\varphi(t=0)=0$ et $\dot{\varphi}(t=0)=0$. Le moment d'inertie de la petite bille est $J=\frac{2}{5}mr^2$ autour de l'axe Gz Le coefficient de frottement solide entre les deux billes est noté f.

1. Etudier le mouvement de la petite bille.
2. Pour quelles conditions initiales l'hypothèse du roulement sans glissement est elle vérifiée ?
3. Que dire du risque de décollement ?

Commentaire :
Un exercice d'oral très similaire au précédent. Ici une étude énergétique est très souhaitable.

2.13 Cylindre sur le plateau d'un camion qui démarre.

Un camion démarre avec une accélération $\vec{a}_0 = a_O\vec{u}_x$ (Mouvement rectiligne uniformément accéléré). Sur son plateau, se trouve un cylindre homogène de rayon R et de moment d'inertie $J=\frac{1}{2}mR^2$ qui n'est pas attaché. Le coefficient de frottement solide entre le cylindre et le plateau est noté f.

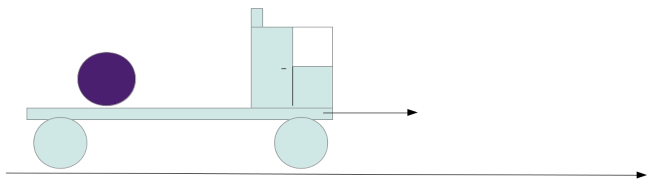

FIGURE 2.3 – Cylindre sur le plateau d'un camion qui démarre.

1. On souhaite étudier le mouvement du cylindre dans le référentiel du sol supposé galiléen.
2. On suppose que le camion accélère faiblement au départ et donc que le cylindre roule sans glisser. En déduire alors les équations du mouvement du cylindre ($\dot{x}(t)$, $\dot{\theta}(t)$)
3. Calculer alors ce que signifie "le camion accélère faiblement"
4. Reprendre l'étude dans le cas où le camion accélère fortement.
5. Reprendre l'étude dans le référentiel du camion.

Commentaire :
Un exercice d'oral plus difficile puisque le support n'est pas fixe. Néanmoins l'étude est menée, au début dans le référentiel R galiléen. Il faut faire particulièrement attention à écrire correctement la vitesse de glissement.

2.14 La craie sur une feuille de papier.

Une craie de masse m et d'axe $G_C y$ est posée sur une feuille de papier (de masse M, de centre de gravité G_F), sur une table. Une force $\vec{F} = F.\vec{u}_x$ est exercée sur la feuille. Différents comportements apparaissent alors :

1. si $F < F_1$, rien ne bouge
2. si $F_1 < F < F_2$, la feuille glisse sur la table mais la craie ne bouge pas sur la feuille.
3. si $F_2 < F < F_3$, la feuille glisse sur la table et la craie roule sans glisser sur la feuille et finit par tomber de celle ci.
4. si $F_3 < F$, la feuille glisse sur la table et la craie glisse sur la feuille et finit là encore par tomber de celle ci.

On note f le coefficient de frottement feuille-craie. Bien que le contact entre la feuille et la table ne soit pas ponctuel, on admet que tout ce passe comme si les actions de contacts se réduisaient à un glisseur appliqué en un point J à la verticale de G_C, centre de gravité de la craie.

Interpréter les résultats expérimentaux.

Commentaire :
Un exercice d'oral très ouvert. Il faut chercher d'abord à comprendre les différentes situations et proposé un modèle dans chaque cas. De plus, certaines données sont absentes, à vous de les introduire : exemple la craie est assimilable à un cylindre de masse m et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mR^2$.

2.15 Bille sur tapis roulant incliné.

Une bille homogène pleine de rayon R, de masse m, de centre d'inertie G, et de moment d'inertie $J = \frac{2}{5}mR^2$ autour de l'axe Gz, est posée sur un tapis roulant montant se déplaçant à la vitesse U et faisant un angle α avec l'horizontale. Le coefficient de frottement solide tapis-bille est f.

1. Déterminer la vitesse de glissement et justifier qu'il y ait glissement au départ du mouvement.
2. Déterminer le mouvement en supposant le glissement.
3. Déterminer la date t_1 où le glissement cesse.
4. Etudier le mouvement ultérieur.

Commentaire :
Un exercice d'oral où cette fois ci encore le support est en mouvement. L'étude est aussi intéressante car il faut étudier et le glissement et le non glissement. Une bonne représentation du système est nécessaire. Enfin pensez à faire le point sur les résultats après le calcul pour développer votre (juste) intuition du mouvement.

2.16 Barre sur deux rouleaux tournants : expérience de Timochenko

Deux cylindres distant de d et de rayon R sont mis en rotation à vitesse respective $+\omega_0\vec{u}_y$ et $-\omega_0\vec{u}_y$ très grande. Une barre homogène de longeur l est placée sur ces deux rouleaux, telle que G soit au milieu des deux rouleaux à t=0 et on constate que le centre de gravité de la barre à un mouvement oscillant et ne décolle pas. Le coefficient de frottement solide barre-rouleau est noté f.

1. Etudier le mouvement de la barre.
2. Que se passerait-il si les deux rouleaux tournaient en sens inverse ?

Commentaire :
Un exercice d'oral très classique mais un peu plus difficile, qui modélise une expérience du Palais des Sciences. Il faut penser à écrire le fait que la barre ne bascule pas (ce qui est une information importante).

FIGURE 2.4 – Barre sur deux rouleaux tournants.

2.17 Oscillateur sur un chariot

Le système étudié est représenté figure2.5. Un cylindre de masse m est astreint à glisser sans frottement sur une tige confondue avec l'axe des x.
Au centre de gravité C de ce cylindre, est accrochée une tige homogène de masse M, de centre de gravité B et la liaison entre la tige et la barre est une liaison pivot parfaite. La tige est donc susceptible d'osciller. Cette oscillation est repérée par un angle θ par rapport à axe vertical.
Initialement, l'ensemble du système est immobile et la barre est lâchée sans vitesse initiale d'un angle θ_0.

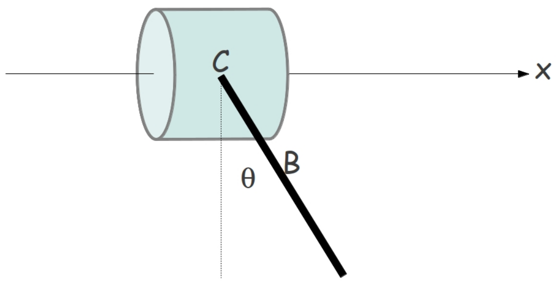

FIGURE 2.5 – Bille sur un prisme mobile.

1. Que dire du mouvement du centre de gravité G du système ?
2. Etudier le mouvement dans le cas des petits mouvements.

Commentaire :
Un exercice très très classique à maitriser. Le choix du système est primordial et il faut bien le préciser afin de définir clairement les forces intérieures et extérieures au système. Par ailleurs, lors du bilan des forces, l'absence de composante sur un axe donne une information essentielle à traduire. Néanmoins l'exercice est difficile car sa résolution est astucieuse.

2.18 Bille sur un prisme mobile

Un prisme de masse m, sur lequel roule sans glisser un rouleau, de masse M et de rayon a, peut glisser sans frottements sur une table horizontale. Cf2.6.

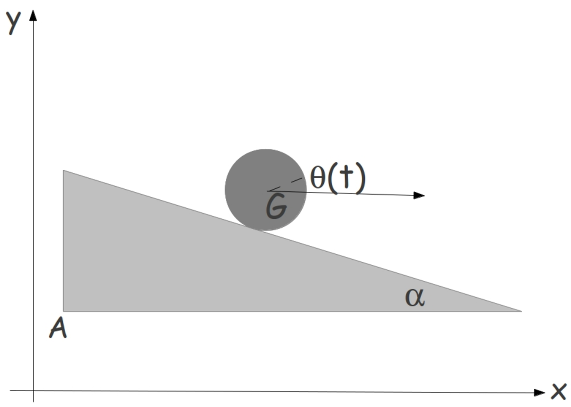

FIGURE 2.6 – Bille sur un prisme mobile.

1. Déterminer l'abscisse x(t) du point A du prisme le long du plan horizontal. On considérera que x(0)=0
2. Exprimer θ(t) l'angle dont a tourné le rouleau à t. On considérera que θ(t=0)=0.

Commentaire :
Un exercice d'oral un peu plus difficile, similaire à l'exercice précédent. Là encore, il faut, dans la rédaction, bien préciser le système étudié afin de définir clairement les forces intérieures et extérieures au système.

2.19 Machine d'Atwood.

Un pavé de masse M se translate sans frottement sur un plan incliné d'angle α. Il est relié à la masse m qui est suspendue dans le vide, par une corde inextensible, de masse négligeable, qui passe dans la gorge d'une poulie mobile de masse m' autour de l'axe fixe horizontal Oy. On supposera que la corde ne glisse pas dans la gorge de la poulie.
Pour décrire le mouvement de la masse m, on utilise l'abcisse z.

Pour décrire le mouvement de la masse M, on utilise l'abcisse x.
Pour décrire le mouvement de la poulie de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}m'R^2$ autour de l'axe fixe horizontal Oy, on utilise l'angle θ.

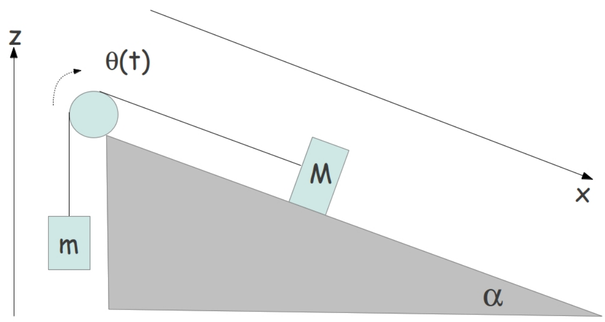

FIGURE 2.7 – Machine d'Atwood.

1. Montrer que les paramètres cinématiques sont liés entre eux : $\dot{x} = \dot{z} = R.\dot{\theta}$
2. Donner l'énergie cinétique du système.
3. Déterminer la masse m_C tel que le système reste à l'équilibre.
4. Si $m > m_C$, étudier le mouvement.

Commentaire :
Un exercice d'oral complexe mais qui sous cette forme guidée devient possible.

2.20 Roue lestée.

Une roue lestée est un solide non homogène assimilée à cerceau homogène de centre C, de masse m et de rayon R sur lequel une masse m est fixée en un point A de la circonférence du cerceau. Cette roue roule sans glisser sur un plan horizontal fixe, où le coefficient de frottement solide est f. On repère son mouvement de translation par l'abcisse de C et son mouvement de rotation par l'angle $\theta = (\vec{u}_x, \overrightarrow{CA})$.

1. Traduire le roulement sans glissement.
2. Calculer $\overrightarrow{v}_C$, $\overrightarrow{v}_A$ et en déduire $\overrightarrow{v}_G$ où G désigne le centre de gravité de l'ensemble.
3. Déterminer l'énergie cinétique de la roue.
4. Etudier le mouvement de la roue.

Commentaire :
Un exercice d'oral difficile mais qui se retrouve encore dans les retours d'oraux.

2.21 Singe sur une perche.

Un singe assimilé à une masse ponctuelle m en A se déplace sur une perche OB, fixée en 0, qui tombe. A t=0, il monte à partir de 0, à une vitesse v_0 le long de la tige.
La perche est assimilée à une barre homogène mince de masse M, de longueur L et de moment d'inertie $J = \frac{1}{3}ML^2$ par rapport à l'axe Oz. La liaison en O est une liaison pivot parfait et le mouvement de la tige est repéré par un angle θ.

1. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OA}$ et donc $\overrightarrow{V}_A$
2. Déterminer l'énergie cinétique du système perche-singe.
3. Etudier le mouvement du système ci-dessus.

Commentaire :
Un exercice d'oral difficile, très ouvert, issu des concours les plus sélectifs.