

# Exercices de Mécanique des Fluides

★ ★ ★

PC

Philippe Ribière

Année Scolaire 2013-2014



# Chapitre 1

## Cinématique des fluides.

### 1.1 Écoulements imaginaires.

On s'intéresse dans cet exercice à des écoulements imaginaires, qui n'ont pas nécessairement de réalité. Le but est de comprendre le lien entre les opérateurs vectoriels introduits et le mouvement du fluide afin de visualiser le mouvement d'un fluide. Les écoulements de tuyau percé et de la tornade, qui viennent par la suite, comblent cette lacune.

#### 1.1.1 1er écoulement

On s'intéresse un écoulement du type  $\vec{v} = ax\vec{u}_x + ay\vec{u}_y$  avec  $a$  une constante.

1. Dessiner les lignes de champ et calculer l'équation d'une d'elles.
2. Calculer  $div(\vec{v})$ .
3. Calculer  $\vec{rot}(\vec{v})$ .
4. On s'intéresse à une particule de fluide de taille  $L^3$ , dont un sommet se trouve en  $O(0,0,0)$  à  $t=0$ . Observer la forme de la particule de fluide à  $dt$ . Calculer sa variation de volume relatif :  $\frac{Vol(dt)-Vol(0)}{Vol(0)}$  et comparer à  $div(\vec{v})$ .
5. Calculer l'accélération d'une particule de fluide.

#### 1.1.2 2eme écoulement

On s'intéresse un écoulement du type  $\vec{v} = -ay\vec{u}_x + ax\vec{u}_y$  avec  $a$  une constante.

1. Dessiner les lignes de champ et calculer l'équation d'une d'elles.
2. Calculer  $div(\vec{v})$ .
3. Calculer  $\vec{rot}(\vec{v})$ .
4. On s'intéresse à une particule de fluide de taille  $L^3$ , dont un sommet se trouve en  $O(0,0,0)$  à  $t=0$ . Observer la forme de la particule de fluide à  $dt$ . Calculer sa variation de volume relatif :  $\frac{Vol(dt)-Vol(0)}{Vol(0)}$  et comparer à  $div(\vec{v})$ .
5. Calculer l'accélération d'une particule de fluide.

### 1.1.3 3eme écoulement

On s'intéresse un écoulement du type  $\vec{v} = ay\vec{u}_x + ax\vec{u}_y$  avec  $a$  une constante.

1. Dessiner les lignes de champ et calculer l'équation d'une d'elles.
2. Calculer  $div(\vec{v})$ .
3. Calculer  $rot(\vec{v})$ .
4. On s'intéresse à une particule de fluide de taille  $L^3$ , dont un sommet se trouve en  $O(0,0,0)$  à  $t=0$ . Observer la forme de la particule de fluide à  $dt$ . Calculer sa variation de volume relatif :  $\frac{Vol(dt)-Vol(0)}{Vol(0)}$  et comparer à  $div(\vec{v})$ .
5. Calculer l'accélération d'une particule de fluide.

*Commentaire :*

*Un exercice de cours pour se familiariser avec les écoulements et les nouveaux opérateurs vectoriels. Penser à faire fonctionner votre intuition physique car rien n'est plus naturel qu'un fluide qui coule.*

## 1.2 Ecoulement bidimensionnel dans une tuyère.

L'écoulement incompressible et stationnaire du fluide se produit dans une tuyère comprise en longueur entre  $x=0$  et  $x=L$  et limitée par deux surfaces d'équation  $y = \pm \frac{L^2}{L+x}$ . Par ailleurs l'écoulement est invariant suivant l'axe  $z$  (tuyère de largeur  $D$  très grande, dans l'axe perpendiculaire à la figure). Le fluide loin de la tuyère est animée d'une vitesse  $\vec{v} = U\vec{u}_x$ . On cherche le champ des vitesses dans la tuyère de la forme  $\vec{v} = v_x(x)\vec{u}_x + v_y(x, y)\vec{u}_y$  dans la tuyère.

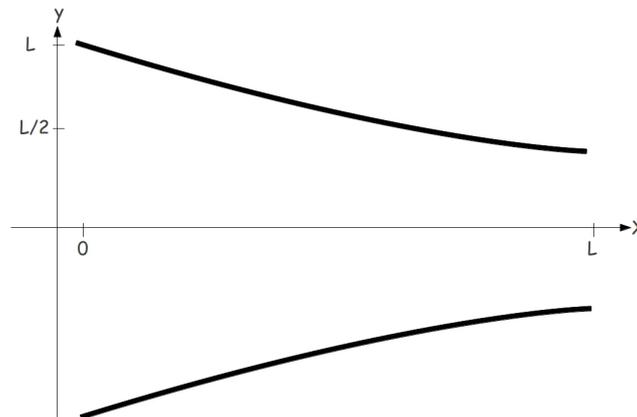


FIGURE 1.1 – Vue en coupe de la tuyère.

1. Justifier brièvement que  $v_y(x=0, y) = 0$  et  $\vec{v}(x=0, y) = U\vec{u}_x$
2. Exprimer la conservation du débit volumique. En déduire  $v_x(x)$

3. Exprimer la conservation locale du débit volumique. En déduire  $v_y(x, y)$
4. En déduire l'équation des lignes de courant.
5. L'écoulement est-il tourbillonnaire ?
6. Étudier l'évolution entre  $t$  et  $t+dt$  de la forme d'une particule de fluide qui à la date  $t$  est un cube  $0 < x < a$  et  $-a/2 < y < a/2$ . Commenter.
7. Déterminer le champ des accélérations

*Commentaire :*

*Un exercice important sur la notion de conservation de la matière, conservation locale et conservation globale. Il est intéressant de voir que le débit volumique ne fait intervenir que la composante  $v_x$  de la vitesse. Il est donc à noter que les informations contenues dans les équations de conservations globales (conservation des débits) n'est pas redondante avec l'équation de conservation locale, et qu'il peut être utile d'utiliser les deux (quand l'énoncé vous y invite) comme dans cet exercice. Pour répondre à la question 5, deux approches sont possibles, soit on calcule explicitement le rotationnel, soit on montre directement que l'écoulement est potentiel (et donc irrotationnel).*

### 1.3 Le tuyau poreux.

On s'intéresse à un tuyau qui fait jaillir de l'eau de manière radiale (on ne s'intéresse pas à l'écoulement dans le tuyau mais à l'écoulement à l'extérieur du tuyau, une fois que le fluide a traversé la paroi poreuse). Le système est à symétrie cylindrique, d'axe Oz, axe du tuyau poreux.

Le champ de vitesse est décrit par  $\vec{v} = v_r(r)\vec{u}_r$ .

On admet aussi que le fluide est éjecté du tuyau en  $r=R$  avec une vitesse  $v_0$  radiale.

1. En supposant le liquide en écoulement incompressible, calculer l'expression de  $v_r(r)$ .
2. Dessiner la carte des lignes de champ.
3. Montrer que ce champ dérive d'un potentiel  $\phi(r)$ . Calculer le.
4. Calculer le rotationnel. Commenter.
5. Comparer brièvement ce problème à celui d'un cylindre infini, de rayon  $R$ , d'axe Oz, portant une charge surfacique uniforme  $\sigma$

*Commentaire :*

*Un exercice de cours. L'opérateur divergence n'est pas donné en coordonnées cylindriques, donc impossible (difficile serait plus exact) d'utiliser l'opérateur div, il faut donc exploiter la conservation du débit volumique entre un cylindre de rayon  $R$  et autre de rayon  $r$ . Par ailleurs, l'exercice prépare le lien entre la mécanique des fluides et les équations de Maxwell en abordant le calcul du champ électrostatique. Enfin, il invite aussi à voir que même si les lignes de champs "divergent", la divergence du champ est nulle, la vitesse du fluide diminue avec  $r$ , la visualisation de la divergence n'est pas si immédiate sur les lignes de champs que le rotationnel (même si l'idée qualitative reste intéressante).*

## 1.4 De la tornade au vortex.

On s'intéresse à une tornade, vent tournant (et malheureusement dévastateur) à grande vitesse. Le système est à symétrie cylindrique, d'axe Oz, axe de la tornade. L'écoulement est supposé incompressible.

Le champ de vitesse est décrit par  $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{u}_\theta$  et un vecteur tourbillon  $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}r\text{rot}\vec{v}$  connu.

$\vec{\Omega} = \Omega_0\vec{u}_z$  si  $r < a$ , donc dans la tornade.

$\vec{\Omega} = \vec{0}$  si  $r > a$ , donc à l'extérieur de la tornade.



FIGURE 1.2 – Une tornade.

1. A partir d'ordre de grandeur, discuter l'hypothèse de l'écoulement incompressible pour l'air. Vérifier que l'écoulement proposé est cohérent avec l'hypothèse faite.
2. En utilisant le théorème de Stokes Ostrogardski :

$$\oint_{C \text{ de } S} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

Etablir l'expression de  $v_\theta(r)$ . Commenter.

3. Dessiner la carte des lignes de champ.

On s'intéresse maintenant au cas limite d'un vortex, tornade telle que  $a \rightarrow 0$  et  $\Omega_0 \rightarrow \infty$  mais en gardant le rapport  $\Omega_0 \cdot a^2$  constant :  $\Omega_0 \cdot a^2 = \frac{\Gamma}{2\pi}$ .

4. Montrer que ce champ dérive d'un potentiel  $\phi(r)$ . Calculer le.
5. Montrer qu'un vortex brise l'invariance par rotation d'angle  $\theta$ .
6. Comparer brièvement ce problème à celui d'un cylindre infini, de rayon R, d'axe Oz, parcouru par un courant volumique uniforme  $\vec{j} = j_0\vec{u}_z$

*Commentaire :*

*Un exercice de cours. Lui aussi prépare le lien entre la mécanique des fluides et les équations de Maxwell en abordant le calcul du champ magnétostatique. De plus, la réflexion sur le vortex est importante*

car elle permet de rendre compte de l'asymétrie d'un écoulement tout en gardant les facilités de calcul de l'écoulement potentiel. Ce résultat sera exploité dans l'exercice sur l'écoulement autour de l'aire d'avion.

## 1.5 Onde dans un bassin.

On s'intéresse aux ondes dans un bassin. Un batteur (une tige plate de la taille de la cuve, posée à la surface de l'eau et liée à un vibreur) crée des ondes à la fréquence  $f=1/T$  à la surface de l'eau et génère donc un écoulement dans l'ensemble du fluide.

Les ondes ainsi créées sont de grande longueur d'onde comparé à la taille des vibrations :  $\lambda \gg h_0$  hauteur d'eau des vagues, qui est l'amplitude de vibration du batteur.

Des traceurs peuvent être disposés au sein du fluide et selon la manière dont est prise la photo (ajustement du temps de pose), il possible soit d'accéder aux lignes de courant (temps de pose court par rapport à  $T$  période du batteur) soit aux trajectoires des particules de fluide (temps de pose de l'ordre de la période  $T$ )

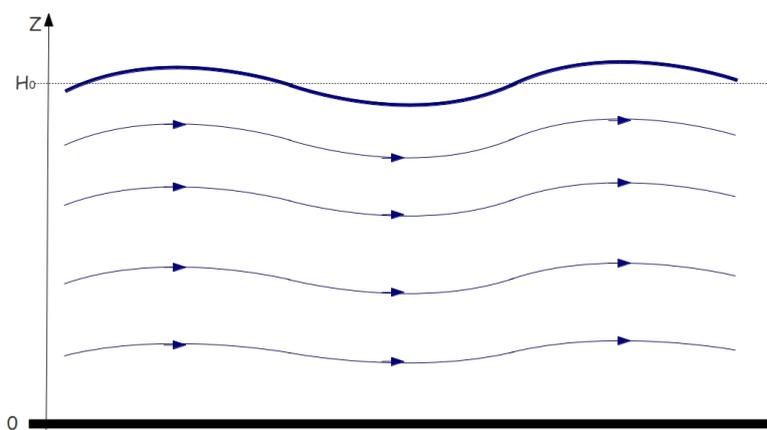


FIGURE 1.3 – Les ondes dans une cuve à onde : visualisation des lignes de courants du champ de vitesse (description Eulérienne).

Les constats sont les suivants :

1. La surface de l'eau possède un mouvement de la forme  $h(x, t) = h_0 \sin(\omega t - kx)$  autour de la position moyenne (eau au repos)
2. Les lignes de champs possèdent une structure analogue mais l'amplitude dépend de  $z$  : les lignes de champ en surface suivent l'interface mais les lignes de champ au fond du bassin sont quasiment rectilignes suivant  $\vec{u}_x$ .

3. Les trajectoires des particules de fluides sont des ellipses mais dont la forme dépend de  $z$  : les ellipses en surface sont quasi circulaire mais celles au fond du bassin sont quasiment plates suivant  $\vec{u}_x$ .

L'objectif est de proposer une interprétation à l'ensemble de ces phénomènes observés.

Le modèle proposé est le suivant : le champ de vitesse est décrit par un potentiel  $\phi(x, z, t)$  :

$$\phi(x, z, t) = f(z) \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$z$  désigne la verticale ascendante. Le fond du bassin est située en  $z=0$  et l'interface libre air eau est située au repos en  $z = H_0$  (et avec l'onde en  $z = H_0 + h(x, t)$ )

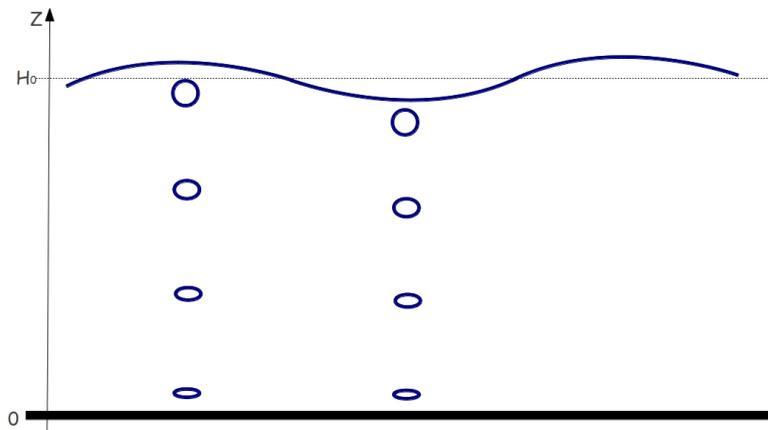


FIGURE 1.4 – Les ondes dans une cuve à onde : visualisation des trajectoires des particules de fluide (description Lagrangienne).

1. Que dire de la forme de l'interface air eau ?
2. Justifier que ligne de courant et trajectoire ne soient pas confondu. Préciser aussi à quel point de vue chaque description fait référence. Le potentiel donné correspond à laquelle des deux descriptions.
3. Justifier que l'écoulement est irrotationnel.
4. On suppose l'écoulement incompressible, justifier brièvement.
5. Donner alors l'équation dont  $\phi(x, z, t)$  est solution. Montrer que  $f(z)$  est alors solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0$$

6. Quelle est la condition aux limites en  $z = 0$  sur la vitesse ? En déduire que celle sur  $\phi$  est

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(z = 0) = 0$$

Que cela impose-t-il sur  $f(z)$  ?

7. Quelle est la condition aux limites à l'interface libre sur la vitesse ?

En supposant l'interface peu inclinée (hypothèse des petits mouvements comparés à la longueur d'onde), et donc que la normale à l'interface soit peu inclinée  $\vec{n}_\Sigma = \vec{u}_z$ , en déduire que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(\text{interface}) = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Enfin justifier que l'on peut exprimer cette condition au limite en  $z = H_0$ , sans tenir compte de la variation de hauteur  $h(x, t)$  soit au final

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(z = H_0) = \frac{\partial h}{\partial t}$$

8. En déduire  $f(z)$  en fonction de  $h_0$ .
9. Calculer alors les composantes du champ de vitesse eulérien.
10. Etablir alors l'équation permettant de trouver l'équation d'une ligne de courant.  
La résolution conduit alors à  $\sinh(kz) \sin(\omega t - kz) = \text{cste}(t)$ . Tracer l'allure de la courbe de courant. (Utiliser la calculatrice graphique ou Maple).
11. Commenter certaines observations au regard des résultats déjà obtenus.
12. On souhaite maintenant revenir à l'équation des trajectoires des particules pour finir d'interpréter les observations.  
On note  $(x^*(t), y^*(t), z^*(t))$  les coordonnées d'une particule de fluide. (Noter que la coordonnée  $y^*(t)$  restera invariante).  
Montrer que  $x^*(t)$  et  $z^*(t)$  vérifie le système d'équation suivant :

$$\frac{dx^*}{dt} = \frac{h_0 \omega}{\sinh(kH_0)} \cosh(kz^*(t)) \sin(\omega t - kx^*(t)) \quad \frac{dz^*}{dt} = \frac{h_0 \omega}{\sinh(kH_0)} \sinh(kz^*(t)) \cos(\omega t - kx^*(t))$$

13. Ce système d'équation différentielle qui ne dépend que du temps n'a pas de solution analytique dans le cas général. Néanmoins, comme la taille des ellipses est dans tous les cas très inférieure à la longueur d'onde, on peut remplacer  $kx^*(t)$  et  $kz^*(t)$  par  $kx_m^*$  et  $kz_m^*$ , valeur moyenne (le centre de l'ellipse).  
Résoudre alors le système d'équations (découplées et linéaires).
14. Interpréter les dernières observations.

*Commentaire :*

*Un exercice d'une grande richesse sur les écoulements potentiels, les conditions aux limites, le passage d'un point de vue à l'autre. De plus l'approche à partir d'observations expérimentales est très moderne. La réflexion entre ligne de champ et ligne de courant dans le cas non stationnaire mérite que vous y attardiez et de vous interroger sur ce que l'on appelle le mouvement du fluide dans chacune des descriptions. Un excellent exercice de révision sur l'ensemble de la partie cinématique des fluides. Notons qu'il est surprenant de résoudre complètement le problème sans écrire d'équations de la dynamique des fluides, mais en réalité le choix naturel de la forme de l'écoulement (écoulement potentiel donc irrotationnel) est à l'origine de cette possibilité puisque cela impose des contraintes dynamiques : cf. dynamique.*

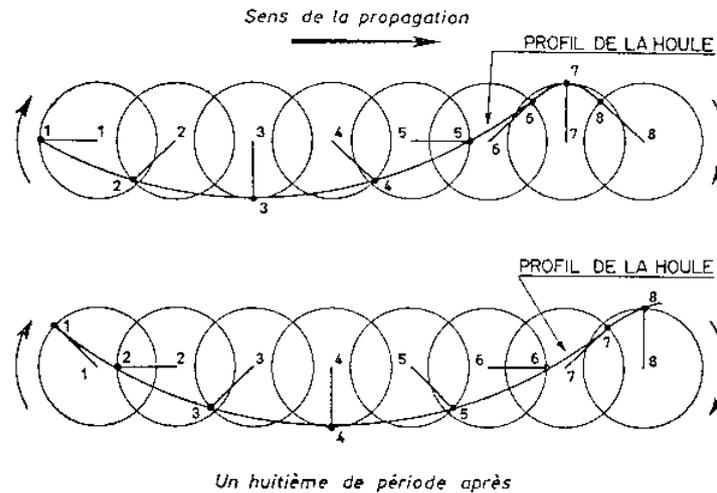


FIGURE 1.5 – Lien entre trajectoires elliptiques et lignes de courant dans la cuve à onde.

## 1.6 Écoulement autour de l'aile d'avion.

Modélisons l'aile d'avion par un cylindre de rayon  $R$  et d'axe horizontal  $Oz$  infini (on néglige les effets de bords) et de rayon  $R$ . On étudie cette aile dans une soufflerie qui génère sur l'aile immobile une vitesse  $\vec{v}(\infty) = -v_0 \vec{u}_x$  à la pression  $p(\infty) = p_0$ .

Les hypothèses de cette étude sont

1. Écoulement stationnaire
2. Écoulement incompressible (raisonnable pour un avion subsonique)
3. Écoulement irrotationnel

1. Montrer que l'écoulement est un écoulement potentiel
2. Montrer que le potentiel est en outre solution d'une équation de Laplace.

On donne la solution générale à l'équation de Laplace en coordonnées cylindrique : la solution (mathématique) de l'écoulement est

$$\phi(r, \theta) = \alpha_0 \ln r + \beta_0 + \sum [\alpha_n r^n \cos(n.\theta) + \beta_n r^{-n} \cos(n.\theta) + \gamma_n r^n \sin(n.\theta) + \delta_n r^{-n} \sin(n.\theta)]$$

3. Justifier alors les deux conditions aux limites :

$$\vec{v}(r = \infty) = -u \vec{u}_x = \text{grad}(-u.r. \cos(\theta))$$

$$\vec{v}(r = R) \cdot \vec{u}_r = 0$$

4. En déduire que l'expression est

$$\phi(r, \theta) = -v_0 \cdot \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cdot \cos \theta$$

5. Calculer  $v_r$  et  $v_\theta$ . Commenter.

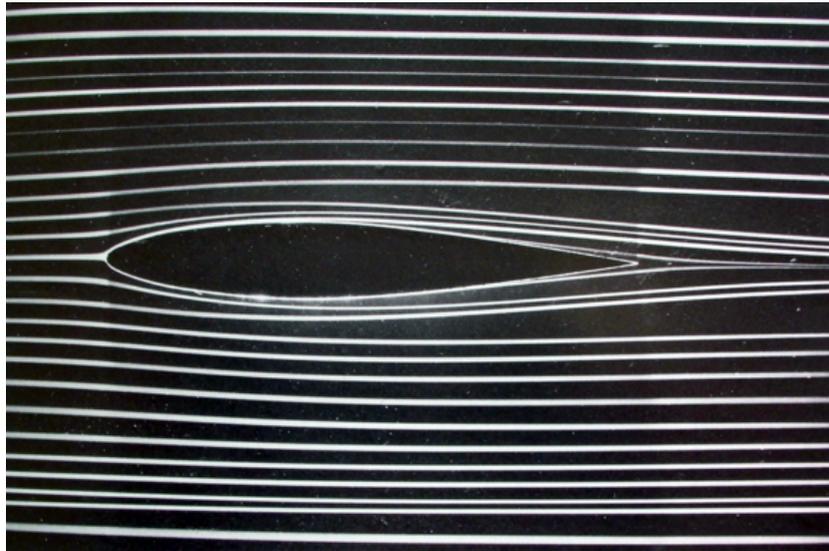


FIGURE 1.6 – Écoulement symétrique autour de l’aile d’avion.

6. Justifier que vu la symétrie de l’écoulement, il est impossible d’imaginer une force de portance verticale. Ce résultat constitue le paradoxe de d’Alembert.

Pour rendre compte de l’asymétrie de l’écoulement, et voir la portance apparaître, il faut ajouter un vortex sur l’axe  $Oz$ , donc rajouter un potentiel  $\phi(r, \theta) = \frac{\Gamma\theta}{2\pi}$ . On admet que le potentiel total est donc  $\phi(r, \theta) = -v_0(r + \frac{R^2}{r}) \cos \theta + \frac{\Gamma\theta}{2\pi}$

7. Montrer que ce potentiel vérifie les CL mais brise la symétrie de l’écoulement.

*Commentaire :*

*Un exercice peu difficile sur le plan technique bien qu’un peu calculatoire mais d’un niveau conceptuel élevé. En effet, quoi de plus intéressant que de comprendre ”pourquoi les avions volent” ! L’écoulement doit tenir compte de l’asymétrie de l’aile et l’ajout d’un vortex qui laisse l’écoulement irrotationnel tout en créant la différence entre intrados et extrados de l’aile est la bonne solution. Notons comme dans l’exercice précédent qu’il est surprenant de résoudre complètement le problème sans écrire d’équations de la dynamique des fluides, mais en réalité le choix naturel de la forme de l’écoulement (écoulement potentiel donc irrotationnel) est à l’origine de cette possibilité. Mais dans cet exercice la forme de l’aile (asymétrique !) et le caractère turbulent (fluide non parfait) sont pris en compte dans l’introduction du vortex. La transformation mathématique (transformation holomorphe, dans le plan complexe) permet cette transformation de l’aile en cylindre tout en traitant la totalité de la physique. Ce n’est pas en niant les frottements avec l’air que l’avion vole mais en les exploitant au contraire !*



# Chapitre 2

## Dynamique des fluides parfaits.

### 2.1 Effet Venturi et trompe à eau.

La trompe à eau, schématisée figure 2.1 est utilisée pour générer une dépression importante par effet Venturi à l'aide d'un écoulement d'eau. Cela est mis à profit en chimie pour la filtration sur Büchner.

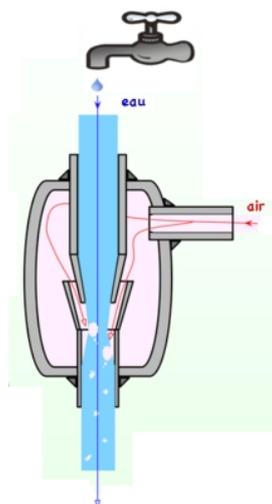


FIGURE 2.1 – Trompe à eau et effet Venturi.

On suppose l'écoulement parfait, homogène, incompressible, stationnaire dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

1. Préciser le sens physique de chacun des termes utilisés dans la phrase ci-dessus ? (Quelle approximation est sous-jacente ?)
2. À l'aide d'une équation de conservation de la matière, établir un lien entre la vitesse au point A (à la sortie du robinet, dans le tube de rayon  $R_A$ ) et la vitesse en un point B (dans la zone de rétrécissement, de rayon  $R_B < R_A$ ).

3. A l'aide d'une équation d'évolution, en déduire la dépression  $p_B - p_A$  en fonction des rayons des tuyaux, de la masse volumique  $\mu$  de l'eau.
4. La dépression est limitée par la pression de vapeur saturante de l'eau à température ambiante qui est  $\Pi(T_{\text{ambiante}}) = 2500Pa$ .  
Que se passe-t-il si  $p_B < \Pi(T_{\text{ambiante}})$ ?
5. Calculer la vitesse maximale et le débit maximal du robinet dans ces conditions. Application numérique avec  $R_A = 1cm$  et  $R_B = 0,2cm$

*Commentaire :*

*Un exercice de cours, très classique et qui tombe encore aux oraux de concours. Il traite d'une application simple mais très concrète de l'effet Venturi, l'exercice est très détaillé ici pour sa mise en place : une équation de conservation de la matière, ici celle du débit volumique par exemple et une équation d'évolution, ici Bernoulli version 2. La question sur la limitation permet de vérifier des connaissances de thermodynamique et de revoir le diagramme P-T de l'eau.*

## 2.2 Effet Magnus au tennis.

Raphaël Nadal possède une frappe de balle (de tennis!) très liftée. Lors de la frappe, il crée en plus d'une vitesse  $v_0 \vec{u}_x$  (rebond de la balle sur le tamis) du centre de gravité, une forte vitesse de rotation  $\Omega_0 \vec{u}_z$  de la balle sur elle même, en profitant des frottements solides entre la balle et le tamis de la raquette. Dans la suite l'axe  $\vec{u}_y$  désigne la verticale ascendante.  
On se place dans le référentiel barycentrique  $R^*$  de la balle de tennis.  
On suppose l'écoulement de l'air parfait, homogène, incompressible, stationnaire.

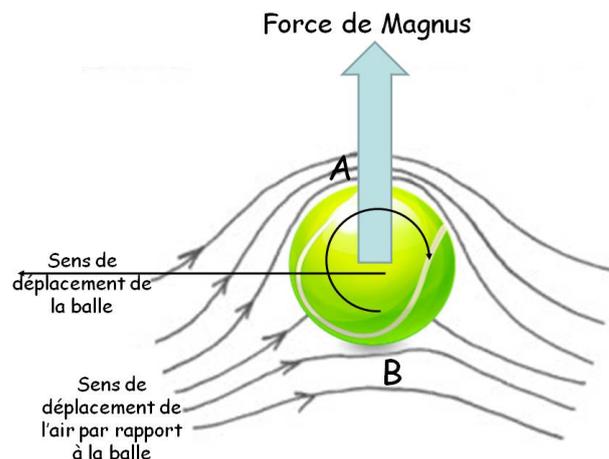


FIGURE 2.2 – Balle de tennis et effet Magnus.

1. En supposant la vitesse de la balle de tennis constante, justifier que  $R^*$  est galiléen.

2. Décrire l'écoulement de l'air autour de la balle de tennis dans le référentiel galiléen (et ses propriétés)
3. Calculer la vitesse d'un point A du bord de la balle, dans le référentiel  $R^*$  de la balle de rayon R, situé à la verticale du centre de gravité, au dessus de celui ci, ainsi que la vitesse d'un point B du bord de la balle dans le référentiel  $R^*$ , situé à la verticale du centre de gravité, au dessous de celui ci.
4. L'air au voisinage de la balle est partiellement entraîné par les poils de la balle de tennis, tant est si bien que la vitesse la vitesse du fluide juste au dessus de la balle de tennis (en A') est  $\vec{v}'_A = -\vec{v}_0 + \varepsilon \vec{v}_A$  et en B', situé juste en dessous de B  $\vec{v}'_B = -\vec{v}_0 + \varepsilon \vec{v}_B$ .  
En déduire alors la différence de pression entre A' et B' en fonction de  $\varepsilon$  et des autres paramètres pertinents du problème.
5. Quelle est alors la direction de la force résultante de cette différence de pression ?
6. Quel est qualitativement l'effet de cette force sur la trajectoire de la balle de tennis ? Discuter à cette occasion les hypothèses faites lors de la modélisation.

*Commentaire :*

*Un exercice de cours, qui tombe aux oraux de concours sous de multiples facettes (tennis, football...) et même en ADS (travaux de polytechnique sur le coup franc de Robertoen 97). L'effet Magnus est une conséquence de l'effet Venturi pour des objets de rotations, très fréquent dans le sport. La rotation de l'objet crée une différence de vitesse entre les deux côté de l'objet et par effet Venturi, il apparaît une différence de pression donc une force. Néanmoins, comment expliquer que dans un écoulement parfait que l'air soit entraîné même partiellement par la balle (conçue pour cela avec son caractère duveteux). Il existe des forces de "contact" fluide-solide : cf. forces de viscosité. Notons aussi que l'idée décrite ici n'est pas très différente de celle utilisée pour expliquer la portance de l'aile d'avion.*

## 2.3 Tube de Pitot.

Le tube de Pitot est une sonde très "rustique" mais essentielle à la sécurité de tous les avions puisqu'elle donne une mesure de la vitesse. (Les tubes de Pitot sont dégivrés régulièrement et une défaillance de l'un deux peut causer une chute de l'appareil.).

La différence de vitesse s'obtient en mesurant la différence de pression entre les points A (point d'arrêt d'une ligne de champ) et B (prise latérale) des deux entrées du tube de Pitot.

1. Justifier que la vitesse du fluide en B est peu différente de la vitesse  $v_0$  de l'avion.
2. On admet que la vitesse en A est nulle. En déduire alors le lien entre la différence de pression  $p_A - p_B$  et la vitesse  $v_0$  de l'avion.
3. Application numérique pour un avion volant à  $300km.h^{-1}$ .

*Commentaire :*

*Un exercice de cours, qui tombe aux encore aux oraux de concours sous de questions de cours. Une fois l'expression de la vitesse en A point d'arrêt et en B connu, l'application de Bernoulli version 2 donne le résultat. La robustesse de cette sonde est appréciée en laboratoire et en aéronautique.*



FIGURE 2.3 – Tube de Pitot.

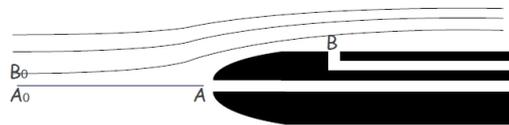


FIGURE 2.4 – Schéma du tube de Pitot.

## 2.4 Écoulement autour de l'aile d'avion et portance.

*Cet exercice fait suite à l'exercice 1.6 du chapitre précédent. Il est important de relire l'énoncé de ce dernier pour aborder celui ci.*

On s'intéresse à nouveau à l'écoulement bidimensionnel autour de l'aile d'avion. L'aile d'avion est modélisée (correctement) par un cylindre de rayon  $R$  et d'axe horizontal  $Oz$  infini (on néglige les effets de bords) et de rayon  $R$ . On étudie cette aile dans une soufflerie qui génère sur l'aile immobile une vitesse  $\vec{v}(\infty) = -v_0 \vec{u}_x$  à la pression  $p(\infty) = p_0$ .

Les hypothèses de cette étude sont

1. Écoulement stationnaire
2. Écoulement incompressible (raisonnable pour un avion subsonique)
3. Écoulement irrotationnel

L'écoulement est potentiel et pour rendre compte de l'asymétrie de l'écoulement (liée à l'asymétrie de l'aile) et voir la portance apparaître, un vortex sur l'axe  $Oz$  est pris en compte. Le potentiel total de l'écoulement est donc :

$$\phi(r, \theta) = -v_0 \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$$

1. Calculer alors les deux composantes de la vitesse  $v_r$  et  $v_\theta$  de la vitesse en tout point de l'espace.
2. En déduire alors la vitesse  $\vec{v}(r = R, \theta)$  et  $\vec{v}(r = \infty, \theta)$ .

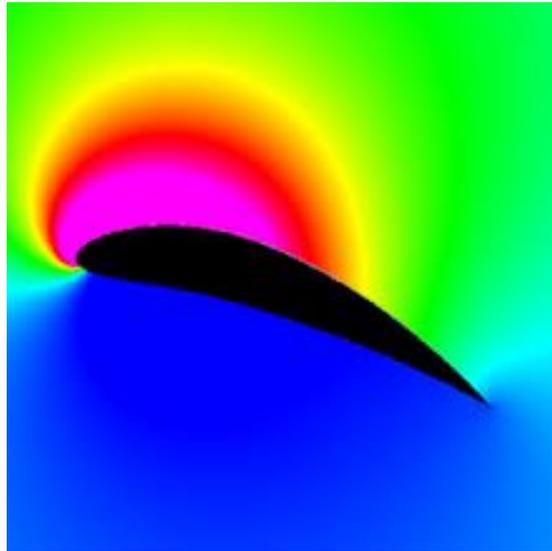


FIGURE 2.5 – Etude des dépressions (rouge) et surpression (bleu) autour d’une aile NACA .

3. Montrer que ce potentiel vérifie les CL mais brise la symétrie de l’écoulement.
4. En déduire alors la pression sur le cylindre-aile  $p(r = R, \theta)$  est

$$p(r = R, \theta) = p_0 + \frac{1}{2}\mu(v_0^2 - 4v_0^2 \sin^2 \theta - \frac{2\Gamma v_0 \sin \theta}{\pi R} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^4})$$

5. Calculer la force résultante sur l’aile d’avion et montrer que

$$\vec{F} \cdot \vec{u}_z \simeq \mu \Gamma v_0 L$$

Commenter le résultat de la simulation 2.5.

6. Justifier qu’il est impossible d’imaginer une force de portance verticale sans vortex, résultat trouvé intuitivement dans l’exercice du chapitre précédent. Ce résultat constitue le paradoxe de d’Alembert.

*Commentaire :*

*Un exercice, tombé dans divers concours. Partant d’un potentiel étudié et justifié dans l’exercice 1.6., on calcule la vitesse au voisinage de l’aile et à l’aide de Bernoulli, on en déduit la pression sur l’aile. Ici l’exercice invite à faire le calcul complet de la résultant de ces forces de pression et l’aide d’un schéma est alors essentiel. La force de portance est uniquement lié à la présence du vortex. Cette exercice n’est pas pour autant fini : comment expliquer et calculer le vortex  $\Gamma$  en relation avec l’asymétrie de l’aile. Comment se fait il qu’il n’y ait qu’une composante normale et pas de composante qui s’oppose au mouvement ? Pour aller plus loin, il faut là encore prendre les forces entre le solides et le fluide : les forces de viscosité. To be continued...*

## 2.5 Théorème de Torricelli.

On s'intéresse au dispositif de Torricelli (à l'origine mis en place pour les lances à incendies des pompiers et les fontaines de sa ville) : un cylindre de rayon  $R$  sert de réserve d'eau et est remplie sur une hauteur  $h$ . En bas de ce cylindre, un tube de longueur  $L$  et de rayon  $r \ll R$  conduit jusqu'à une ouverture libre duquel l'eau s'éjecte.

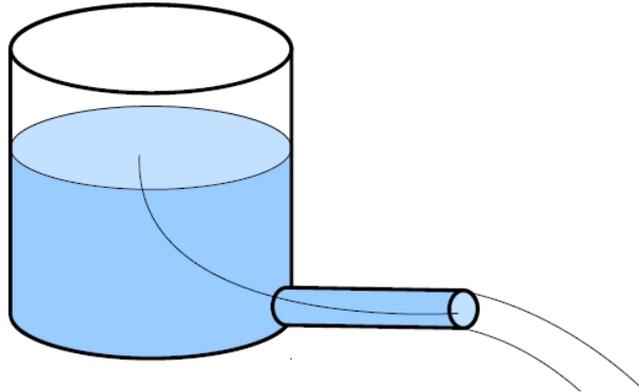


FIGURE 2.6 – Ecoulement de Torricelli.

1. Dans cette première question, on s'intéresse au régime permanent de l'écoulement. Montrer que la vitesse d'éjection des particules de fluides à l'extrémité du petit tube est  $v = \sqrt{2gh}$ . Commenter cette valeur.
2. Dans cette question, on souhaite étudier le régime quasi permanent afin de calculer le temps de vidange du réservoir.

On suppose l'écoulement quasi unidimensionnel d'une part dans le réservoir  $\vec{V} = -V(z, t)\vec{u}_z$  et quasi unidimensionnel d'autre part dans le tube  $\vec{v} = -v(x, t)\vec{u}_x$ .

- (a) Montrer que la vitesse dans le réservoir  $V$  ne dépend pas de  $z$ .
  - (b) De même, montrer que la vitesse  $v$  de l'eau dans le tube ne dépend pas de  $x$ .
  - (c) Trouver le lien entre  $V$ ,  $v$ ,  $R$  et  $r$ .
  - (d) Etablir le lien entre  $V$  et  $\dot{h}$ . En déduire le lien entre  $v$  et  $\dot{h}$ .
  - (e) En supposant que la vitesse établie question 1 reste vraie (donc que le régime est quasi stationnaire),  $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ , en déduire l'équation différentielle dont  $h(t)$  est solution.
  - (f) Résoudre cette équation et en déduire le temps de vidange  $T_0$  du réservoir rempli initialement d'une hauteur d'eau  $h_0$ . Commenter.
3. Dans cette question, on souhaite étudier le régime transitoire initial et valider a posteriori l'hypothèse du régime permanent ou quasi permanent. On suppose que lors de ce régime transitoire, la hauteur d'eau dans le réservoir ne varie quasiment pas. On souhaite donc calculer le temps qu'il faut pour que la vitesse d'éjection passe

de la valeur 0 (quand le système est mis en marche, ouvert) à la valeur en régime permanent  $v_0 = \sqrt{2gh_0}$ .

- (a) A partir de l'équation d'Euler, montrer de  $v$  est alors solution de l'équation différentielle suivante :

$$2L \frac{dv}{dt} = gh_0 - v^2$$

- (b) Chercher des solutions de la forme  $v(t) = v_\infty \tanh(\frac{t}{\tau})$  Exprimer  $v_\infty$  et  $\tau$ .  
 (c) Justifier les approximations des questions précédentes.

*Commentaire :*

*Un exercice, extrait de CCP. La première question, parfois appelé théorème de Torricelli est posé en question de cours (ou exercice de cours) à divers oraux. Il s'agit d'une simple application du théorème de Bernoulli version 2. Même si l'énoncé ne le dit pas explicitement, il faut faire seul (à l'oral) les hypothèses nécessaires. L'étude de la vidange est simple sur le plan des idées mais la résolution est un peu calculatoire. Enfin l'étude en régime non stationnaire repose encore une fois sur la généralisation de Bernoulli à partir de l'équation d'Euler. D'une manière générale, cet énoncé est peu directif ce qui en fait un exercice de niveau élevé mais les méthodes mises en jeu ici constituent un excellent panel des méthodes du chapitre. Il s'agit d'un excellent exercice pour les révisions.*

## 2.6 Oscillation du liquide dans un tube en U

On s'intéresse à de l'eau contenu dans un tube en U.

Au repos, le fluide est à une hauteur  $h_0$  dans chacune des deux branches verticales du U.

En présence d'une perturbation de hauteur  $a$  sur une branche, on observe une oscillation de la hauteur du fluide  $h(t)$  autour de la valeur  $h_0$  :  $h(t) = h_0 + a \cos(\omega t)$ .

Le but de cet exercice est de rendre compte de cette oscillations et de calculer la pulsation  $\omega$  de celle ci.

On repère un point du fluide par une abscisse curviligne  $s$   $s \in [0, L]$  et on suppose alors  $\vec{v} = v(s, t) \vec{s}$

1. Par analyse dimensionnelle, déterminer à une constante multiplicative près  $\omega$ .
2. Montrer que la  $v(s, t)$  ne dépend pas de  $s$
3. Calculer  $v(s, t)$  en fonction de  $h(t)$
4. Partant de l'équation d'Euler et en réexploitant l'idée de Bernoulli, trouver l'équation différentielle donc  $h(t)$  est solution.
5. En déduire la pulsation  $\omega$  et la période  $T$  des oscillations.

*Commentaire :*

*Un exercice d'oral, rédigé ici de manière assez détaillée. Pensez à faire un schéma pour bien visualiser le problème. Ici les conditions d'applications du théorème de Bernoulli ne sont pas remplies puisque l'écoulement de l'eau n'est pas stationnaire. Il faut être conscient que les autres conditions sont remplies même si l'énoncé le dit pas. Il s'agit donc d'une généralisation du théorème de Bernoulli au*

*cas non stationnaire. C'est sur ce point que l'énoncé est directif : partir de l'équation d'Euler, puis exploiter l'idée de Bernoulli i.e. intégrer le long d'une ligne de courant, le terme  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{s}_s$  s'intègre facilement. Dans la réalité, les oscillations sont amorties (régime pseudo-périodique) à cause des forces de viscosité.*

## 2.7 Levitation d'une balle de ping pong avec un sèche cheveux.

Le but de cet exercice est de rendre compte de l'expérience de cours, facile à réaliser mais spectaculaire de la balle de Ping Pong qui lévite à l'aide d'un sèche cheveux 2.7. Pour cela, on imagine que



FIGURE 2.7 – Levitation de la balle de Ping Pong avec un sèche cheveux.

le flux d'air passe au dessus de la balle de Ping Pong, et est déviée par cette dernière. Il s'enroule sur la balle et repart en symétrie par rapport à la verticale. Faire un schéma de l'air arrivant au dessus de la balle de Ping Pong sous un angle  $\alpha$  avec la verticale. Expliquer qualitativement la lévitation.

*Commentaire :*

*Un exercice d'oral, riche car qualitatif donc sans réel calcul mais qui est aussi très peu directif et qui demande au candidat de poser les "bonnes" hypothèses. En s'inspirant des exercices précédent, une solution doit apparaître. Là encore, à la fin de l'exercice, il faut s'interroger sur la possibilité pour un fluide parfait d'être dévié. Les forces de viscosités font cruellement défaut.*

## 2.8 Levitation d'une plaque sur un jet d'eau vertical.

Dans cet exercice, on souhaite étudier la possibilité qu'une plaque horizontale cylindrique de masse volumique  $\mu$  d'épaisseur  $a$  et de rayon  $R$  lévite dans un jet d'eau vertical vers le haut (l'axe du jet d'eau est confondu avec l'axe du cylindre).

L'eau sort du tuyau à la pression  $p_0$  et avec la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$  à travers une section  $S_0 = \pi r_0^2$ . Le long du cylindre sur lequel l'eau coule, l'écoulement est supposé radial (pour  $r > r_0$ )  $\vec{v} = v_r(r) \vec{u}_r$  sur une épaisseur  $e$ .

La masse volumique de l'eau est noté  $\rho$ .

Par ailleurs  $R = 4.r_0$  et  $e = r_0/2$ .

1. Justifier la forme proposée pour la vitesse de l'eau le long de la plaque.
2. L'écoulement est supposée incompressible (justifier). En déduire  $v_r(r)$ .
3. Calculer la pression  $p(r)$
4. En déduire la vitesse  $v_0$  pour faire léviter la plaque.

*Commentaire :*

*Un exercice d'oral, extrait de centrale. L'exercice est simple et détaillé : une question pour la conservation du débit volumique, une question pour l'équation de Bernoulli dont il faut pas oublier de rappeler les hypothèses. Le calcul des forces de pression est ici simplifié (comparé à l'aile d'avion) par le fait que la normale à la surface est constante. Un exercice clair, à maîtriser.*

## 2.9 Cavitation.

L'hélice des navires génèrent une forte dépression ce qui crée des bulles de gaz (vapeur d'eau). Ce phénomène de cavitation est responsable d'une érosion de l'hélice (explosion des bulles) et aussi d'un bruit très caractéristique de l'hélice (et donc très nuisible pour les navires militaires).

On imagine alors une bulle de gaz de rayon  $a_0$  à la date  $t = 0$  et de pression interne très faible. On souhaite étudier l'évolution de son rayon  $a(t)$  dans l'eau en négligeant d'une part les effets de la pesanteur et d'autre part les autres bulles. Le fluide autour de l'unique bulle est donc mis en mouvement par les variations de rayon de la bulle et on note  $\vec{v}(M, t) = v(r, t) \vec{u}_r$  le champ de vitesse en coordonnées sphérique dans le fluide.

Loin de la bulle, les conditions aux limites sont  $v(r = \infty, t) = 0$  et  $p(r = \infty, t) = p_\infty$ .

L'écoulement de l'eau est supposé parfait, incompressible et homogène, dans un référentiel galiléen où la bulle est immobile.

1. Par analyse dimensionnelle, en supposant que le temps d'implosion de la bulle s'écrit en fonction de la masse volumique  $\mu$  de l'eau, de  $p_\infty$  la pression au repos et de  $a_0$  :

$$T = k a_0^\alpha \mu^\beta p_\infty^\gamma$$

déterminer les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Que représente  $k$ ? Donner un ordre de grandeur de  $T$  pour une bulle de rayon millimétrique, avec  $p_\infty = 1$  bar.

2. En exploitant la conservation du débit volumique et les conditions aux limites sur la bulle, montrer que

$$v(r, t) = \frac{a^2 \dot{a}}{r^2}$$

3. Montrer alors que l'écoulement est potentiel. Le calculer pour  $\phi(r = \infty, t) = 0$ . Qu'en conclure ?  
 4. En exploitant une intégrale première de l'équation d'Euler entre  $r = a_0$  et  $r = \infty$ , montrer que

$$a(t) \frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{da}{dt} \right)^2 = -\frac{p_\infty}{\mu}$$

5. On fait le changement de variable suivant  $a^*(t) = \frac{a(t)}{a_0}$  et  $t^* = \frac{t}{\tau}$ .  
 Trouver l'équation dont  $a^*$  est solution.  
 Choisir  $\tau$  de manière à avoir une équation universelle. Retrouver alors le temps d'implosion.  
 Quel est l'intérêt de ce changement de variable ?  
 6. L'équation d'Euler impose pour  $a^* = \frac{1}{10}$  (juste avant implosion) pour  $p^* = \frac{p}{p_\infty}$  :

$$\frac{\partial p^*}{\partial r} = \frac{2}{15} \frac{a_0}{r^2} \left( \frac{a_0^3}{r^3} - 250 \right)$$

Montrer que la pression passe par un maximum  $p_M$  pour une distance  $r_M$ . Evaluer cette distance et commenter.



FIGURE 2.8 – Cavitation sur une hélice de bateau.

*Commentaire :*

*Un exercice extrait des Mines. Un problème riche avec de l'analyse dimensionnel, un problème à symétrie sphérique, une généralisation du théorème de Bernoulli dans le cas d'un écoulement non stationnaire mais dérivant d'un potentiel et un sujet intéressant, dans l'esprit même de ce concours sélectif. Il faut s'aider des résultats fournis par l'énoncé.*

## 2.10 Tuyère subsonique/supersonique.

On s'intéresse à une tuyère possédant un axe de révolution  $Ox$  et dont la section évolue selon une loi  $S(x)$ . On suppose que l'écoulement dans cette tuyère est stationnaire, quasi unidimensionnel donc caractérisé par une vitesse  $\vec{v} = v(x)\vec{u}_x$ , une pression  $p(x)$  et une masse volumique  $\mu(x)$  (le fluide est donc compressible).

1. Traduire les trois équations couplées faisant intervenir les 3 champs.
2. Etablir alors que  $(1 - \frac{v^2}{c^2})v \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{v^2}{S} \frac{dS}{dx}$  où  $c = \frac{\gamma P}{\mu}$  désigne la vitesse du son.
3. Si le nombre de Mach  $M = \frac{v}{c}$  est inférieur à 1, quelle doit être la forme de la tuyère pour que  $v(x)$  soit une fonction croissante.
4. Si le nombre de Mach  $M = \frac{v}{c}$  est supérieur à 1, quelle doit être la forme de la tuyère pour que  $v(x)$  soit une fonction croissante.
5. Commenter alors la forme de la tuyère 5.4.

*Commentaire :*

*Un exercice extrait de Centrale. Les trois équations dont il est question doivent être établies de manière autonome par le candidat : une équation de conservation de la matière (traduire un bilan global qui se prête bien aux approximations), une équation d'évolution, et une équation thermodynamique puisque le fluide est compressible. La suite est guidée. Dans l'énoncé originel, il fallait reconnaître que  $c$  est la vitesse de l'onde sonore.*



FIGURE 2.9 – Tuyère de fusée en sortie de la chambre de combustion.



# Chapitre 3

## Statique des fluides.

### 3.1 Pression au fond d'une piscine et la règle de plongée.

Dans cet exercice, on souhaite étudier l'évolution de la pression en fonction de la profondeur dans un liquide supposé incompressible.

1. Rappeler la relation fondamentale de la statique des fluides. Quelle est l'idée sous jacante à cette démonstration ?
2. L'eau est assimilée à un fluide incompressible. Calculer la pression au fond d'un bassin de profondeur  $H=2,3\text{m}$  sachant que sur l'interface plane air eau la pression est  $p_0 = 10^5 \text{Pa}$ . Commenter par rapport à votre expérience personnelle.
3. La règle de plongée est : "la pression augmente d'une atmosphère tous les 10m". Commenter.

*Commentaire :*

*Un exercice de PCSI, à maîtriser parfaitement. Il rappelle aussi l'expérience du tonneau de Pascal. L'expression obtenue est simple car le fluide est supposé incompressible et donc la RFSF s'intègre facilement. Il s'agit en fait d'un cas particulier de la première relation de Bernoulli.*

### 3.2 Pression dans l'atmosphère isotherme.

Dans cet exercice, on souhaite étudier l'évolution de la pression en fonction de l'altitude dans un gaz (l'atmosphère) compressible, assimilé à un gaz parfait à température  $T_0$  constante.

1. Rappeler la relation fondamentale de la statique des fluides. Quelle est l'idée sous jacante à cette démonstration.
2. L'air est assimilé à un gaz parfait à température  $T_0$  constante. Etablir alors le lien entre sa masse volumique  $\mu$  et la pression  $P$
3. En injectant cette expression dans la RFSF, établir l'équation différentielle dont  $p(z)$  est solution. La résoudre sachant que  $p(z = 0) = p_0$ .
4. Faire apparaître une hauteur  $H$  caractéristique des variations de pression. La calculer et commenter.

5. On cherche à évaluer la différence de pression sur une hauteur  $h$  telle que  $h \ll H$ . Estimer  $p(h)$  par un développement limité. Commenter le résultat obtenu.
6. Réinterpréter le facteur exponentiel comme un rapport de deux énergies. Commenter.

*Commentaire :*

*Un exercice de PCSI, à maîtriser parfaitement. Ici la RFSF ne s'intègre pas immédiatement puisque l'on suppose  $\mu$  dépend de  $z$ . Néanmoins l'expression exacte montre que les variations de pression se font sur une hauteur très grande, de l'ordre de 10km. Il est donc bien souvent raisonnable de considérer dans les expériences usuelles que  $\mu \simeq cste$ . Enfin le modèle de l'atmosphère isotherme est plutôt valable pour les hautes couches de l'atmosphère. Un autre modèle est possible pour les basses couches et est proposé dans un exercice ci après.*

### 3.3 Mesure de la masse volumique d'un fluide à l'aide d'un tube en U.

On considère le tube en U de la figure 1, ouvert aux deux extrémités sur l'atmosphère à la pression  $P_0$ . Ce tube contient deux liquides non miscibles : (1) en gris clair de masse volumique  $\rho_1$  connue, et (2) en gris foncé de masse volumique  $\rho_2$  inconnue. Calculer  $\rho_2$  en fonction de la hauteur des différentes interfaces. *Commentaire : L'expérience décrite permet la mesure de la densité d'un liquide connaissant la densité d'un autre liquide non miscible au premier. La rédaction de la RFSF dans chaque liquide et de la continuité de la pression doit être claire.*

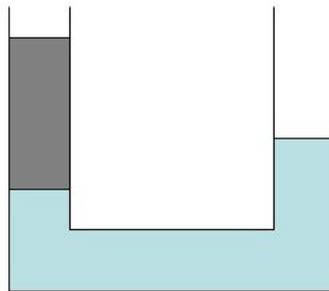


FIGURE 3.1 – Calcul de la masse volumique d'un fluide dans un tube en U.

### 3.4 Pression dans l'atmosphère polytropique.

L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M$  et la relation  $pV^k = cste$ , avec  $k$  fixe, donné, est supposée vraie dans tout l'atmosphère. Cette relation est appelée relation polytropique d'indice  $k$ . Au niveau du sol pris comme référence des altitudes, la pression est  $p_0$ , la température  $T_0$  et la masse volumique du fluide  $\mu_0$ .

1. Sachant  $pV^k = cste$ , établir le lien entre  $p$  et  $\mu$ .

2. Etablir l'équation dont  $p$  est solution.
3. En déduire que  $\frac{dT}{dz} = cste'$ . Calculer  $k$  sachant que  $\frac{dT}{dz} = -7.10^{-3} K.m^{-1}$ .

*Commentaire : Cet exercice se propose d'exploiter un modèle plus réaliste pour les basses couches de l'atmosphère que le modèle de l'atmosphère isotherme. Pour les premières questions, il suffit d'appliquer la RFSF et de l'intégrer dans le cadre de ce nouveau modèle i.e. avec la nouvelle relation entre  $p$  et  $\mu$ . On montre alors à la dernière question que la température décroît linéairement avec l'altitude. (On dit que l'atmosphère a un gradient de température constant.) A noter que cet exercice est parfois posé d'une manière plus simple : on admet comme constatation expérimentale que l'atmosphère possède un gradient de température constant :  $T = -a.z + T_0$  et on demande alors de trouver l'évolution de la pression en fonction de  $z$ .*

### 3.5 Stabilité de l'atmosphère polytropique.

L'air es assimilé à une gaz parfait de masse molaire  $M=29g.mol^{-1}$ . La température varie avec l'altitude selon la loi  $T(z) = T_0 - az$  où  $a$  est une constante. Le champ de pesanteur est supposé uniforme. On note  $P_0$  et  $\rho_0$  à l'altitude  $z = 0$  prise comme référence.

1. Commenter le modèle adopté pour l'air et justifier le nom d'atmosphère à gradient de température donner aussi à ce modèle.
2. Etablir la relation entre  $P$  et  $T$  à l'altitude  $z$ . Montrer que  $\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^q$  avec  $q = \frac{Mg}{Mg - Ra}$ , appelé loi polytropique.
3. Des fluctuations dans l'atmosphère crée des mouvements des particules de fluide. Considérons l'une d'elle qui monte d'une altitude  $dz$  et subit une transformation adiabatique réversible. Montrer que l'atmosphère n'est stable vis à vis de cette perturbation que si  $a$  reste inférieure à une valeur que l'on déterminera.
4. Qualitativement, que se passe-t-il si le gradient de température est important.

*Commentaire : La première question est une réflexion sur les modèles adoptés et la seconde sur l'atmosphère polytropique est très classique. La seconde partie l'est un peu moins mais l'idée de départ est simple : si une particule de fluide monte, elle doit redescendre seule dans une atmosphère stable.*

### 3.6 L'ennemi du Titanic.

Un iceberg est assimilé à un cube de glace de densité  $d=0,92$  de côté  $l$ . Il flotte et  $h$  désigne la hauteur émergée de l'iceberg. Pourquoi un iceberg flotte-il ? Calculer  $h$  en fonction de  $l$ . Commenter la valeur trouvée. *Commentaire : Le très classique exercice du glaçon, qui repose essentiellement sur la poussée d'Archimède.*

### 3.7 Force de pression sur un barrage.

Calculer la résultante des forces de pression sur le barrage dessiné figure 4, sachant que la hauteur d'eau est  $h$ , que le barrage fait un angle  $\alpha$  avec la verticale, et qu'il est de largeur  $L$ .

*Commentaire : Cet exercice propose de reprendre le calcul des forces de pression sur une surface comme dans le cours (calcul d'une intégrale double) et de comparer la situation du cours avec cette situation plus favorable puisqu'une partie de la force (une composante de la force) est compensée par la réaction du support.*

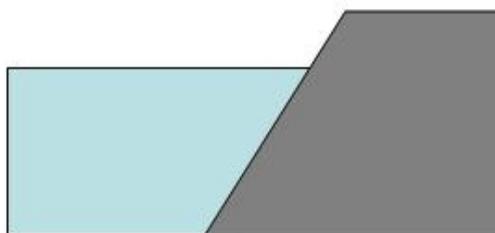


FIGURE 3.2 – Calcul de la force de pression sur un barrage.

*Commentaire :*

*Un exercice de calcul des forces de pression (statique) sur un objet. La méthode est celle utilisée dans les exercices de mécanique des fluides et elle est donc à maîtriser. Néanmoins l'exercice reste simple car le vecteur directeur de chacune des forces pressantes est identique sur tout le barrage.*

### 3.8 Force de pression sur un objet : la chasse d'eau.

Une barre de taille l.L.h, représentée en coupe figure 5 est plongée dans un liquide.

1. Calculer la résultante des forces de pression sur l'objet quand celui ci est posé sur le fond.
2. Calculer la résultante des forces de pression sur l'objet quand celui ci est entouré de liquide (le centre de gravité du solide est supposé à une profondeur  $H$ ) Que dire de la dépendance en  $H$  de ce résultat ?
3. Expliquer le principe de chasse d'eau des toilettes.

*Commentaire : Cet exercice permet de faire le point sur la résultante des forces de pression sur un objet dans l'eau, selon qu'il est partiellement immergé ou totalement immergé. Même la chasse d'eau est un système ingénieux !*

### 3.9 Pression dans un liquide faiblement compressible.

Dans cette exercice, on renonce au modèle du fluide incompressible pour décrire l'eau. L'eau maintenue à la température  $T = 280 \text{ K}$  est alors caractérisée par coefficient  $\chi_T = -5.10^{-10} \text{ S.I.}$  constant

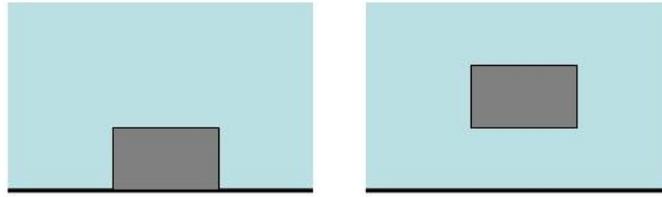


FIGURE 3.3 – Calcul de la force sur un objet partiellement ou totalement immergé.

1. Rappeler la définition de  $\chi_T$  ainsi que son unité. Commenter la valeur de  $\chi_T$  donnée.
2. Etablir l'expression de la masse volumique  $\rho$  en fonction de  $p$ ,  $\chi_T$  et de  $p_0$  et  $\rho_0$  à la surface.
3. Déterminer  $p(h)$  où  $h$  désigne la profondeur.
4. Pour  $h = 10^4 m$ , évaluer la correction apportée par ce modèle par rapport au modèle du fluide incompressible.

*Commentaire : Cet exercice propose de renoncer pour un temps au modèle du liquide incompressible et de regarder l'effet de la compressibilité de l'eau (très faible mais non strictement nulle) sur l'évolution de pression dans le liquide. Il faut donc partir de la RFSF et intégrer cette équation dans le nouveau modèle. L'exercice est assez calculatoire et les conclusions permettent de constater la faiblesse des corrections apportées donc l'intérêt du modèle du fluide incompressible, qui est facile à utiliser et dont le résultat est simple.*



# Chapitre 4

## Dynamique des fluides visqueux

### 4.1 Comment bien étaler le miel sur la tartine.

Du miel, fluide incompressible de masse volumique  $\mu$ , de viscosité dynamique  $\eta$  est étalé sur une surface plane, la tartine, en une épaisseur  $e$  à l'aide d'un couteau assimilé à une plaque en mouvement de translation à la vitesse  $\vec{u} = u \cdot \vec{u}_X$  parallèle à la tartine.

L'écoulement est donc stationnaire (et incompressible).

Par symétrie, on trouve que  $\vec{v} = v_x(x, y)\vec{u}_x$  où  $x$  est parallèle au support, la tartine, et  $y$  perpendiculaire au support selon la verticale ascendante.

1. Montrer que la vitesse ne dépend pas de la composante  $x$ .
2. Que dire alors de l'accélération du fluide ?
3. Calculer la pression dans le fluide.
4. Trouver l'équation de la vitesse du fluide.
5. Trouver les deux conditions aux limites de la vitesse.
6. Calculer la vitesse du fluide. Représenter ces variations en fonction de  $y$ . Commenter.
7. Calculer le débit volumique. Commenter.
8. Calculer la force nécessaire pour faire avancer le couteau (pour étaler le miel).

*Commentaire :*

*Un exercice classique, proche du cours. Le fait que le système de coordonnées choisies soit cartésien simplifie le problème et sa résolution. La démarche est très classique : étude d'une équation de conservation et une équation d'évolution, ici l'équation de Navier Stokes qui n'est pas rappelé.*

### 4.2 Estimation de la couche limite sur une aile d'avion.

On souhaite étudier l'épaisseur  $\delta$  selon  $\vec{u}_z$  de la couche limite au dessus de l'aile d'avion de longueur (de corde)  $L$  selon  $\vec{u}_x$  par une analyse semi quantitative pour un écoulement stationnaire, incompressible et homogène.

1. Rappeler le mode de transport principal de la quantité de mouvement à l'extérieur et à l'intérieur de la couche limite.

Le bord de la couche limite correspond à l'égalité des deux termes précédent.

On suppose l'écoulement quasi unidimensionnel :  $\vec{v} \simeq v_x(x, z)\vec{u}_x$ .

2. Estimer le terme de transport convectif de la quantité de mouvement.
3. Estimer le terme de transport diffusif de la quantité de mouvement et montrer qu'une des deux composantes est très supérieure à l'autre.
4. En déduire l'expression de  $\frac{\delta}{L}$  en fonction du Reynolds.
5. Dessiner alors l'allure de la couche limite sur l'aile.
6. Que dire du sillage de l'aile d'avion ? Quel terme, convectif ou diffusif, domine ?

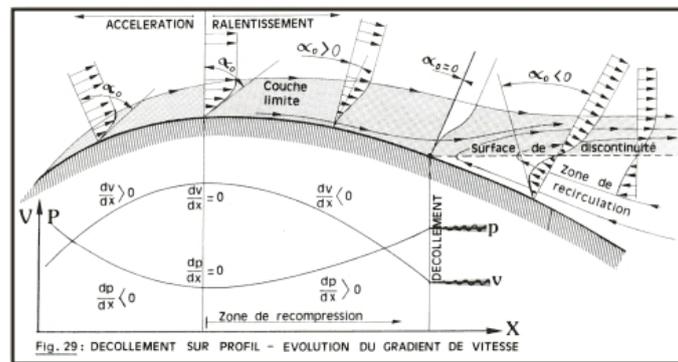


FIGURE 4.1 – Couche limite sur une aile d'avion.

*Commentaire :*

*Un exercice extrait d'un problème d'écrit. L'analyse des termes d'une équation est une démarche fréquente en physique et en mécanique des fluides en particulier. Il convient de se familiariser avec cette méthode. La dernière question est difficile car le sillage correspond à un écoulement turbulent, non réellement étudié en classe, et pour lequel le problème reste très ouvert. La difficulté de ce type de phénomène est leur caractère multiéchelle.*

### 4.3 Écoulement de Poiseuille

On étudie l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse volumique  $\mu$ , de viscosité dynamique  $\eta$ , dans une canalisation cylindrique de rayon  $R$  faible et d'axe  $Oz$  horizontal, de longueur  $L$ . Un point dans la canalisation est repéré par ses coordonnées cylindriques.

On suppose que le champ de vitesse est  $\vec{v} = v_z(r, z)\vec{u}_z$  et que le champ de pression est  $P = P(r, z)$ . On rappelle que dans ce cas  $\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_z}{\partial z}$  et  $\Delta\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r})\vec{u}_z$ . L'influence de la pesanteur sur l'écoulement est négligé.

1. Montrer que la vitesse ne dépend pas de la composante  $z$ .

2. Montrer que l'accélération de la particule de fluide est nulle.
3. En déduire que la pression ne dépend pas de  $r$ . Calculer la pression en fonction des deux valeurs aux extrémités du tuyau  $P(z = 0)$  et  $P(z = L) < P(0)$ .
4. Montrer que la vitesse du fluide est

$$v_z(r) = \frac{(P(0) - P(L)) \cdot (R^2 - r^2)}{4\eta L}$$

Représenter ces variations en fonction de  $r$ . Commenter.

5. Calculer le débit volumique. Commenter.
6. Calculer la chute de pression dans une artère de longueur  $L=1\text{m}$ , de rayon  $R=0,5\text{cm}$  et pour laquelle le débit volumique  $D_v = 80\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  sachant que le sang a une viscosité dynamique moyenne  $\eta = 4 \cdot 10^{-3} \text{Pl}$ . Comparer à la chute de pression que génère le coeur : "12-8" soit  $12-8=4\text{cm}$  de mercure ( $\rho_{Hg} = 13500\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $g = 9,81\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ).
7. Faire une analogie avec la loi d'ohm (globale) en électrocinétique. Comparer la résistance d'un fil (et ses variations en les divers paramètres) et la résistance hydrolique dans un écoulement de Poiseuille.

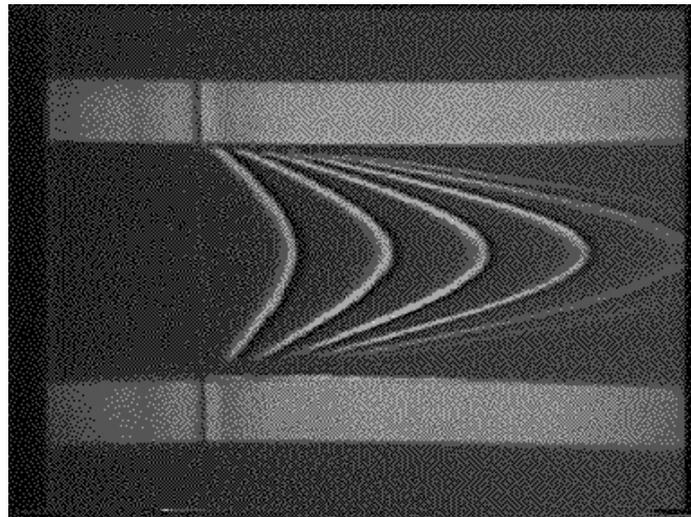


FIGURE 4.2 – Visualisation expérimentale de l'écoulement de Poiseuille.

*Commentaire :*

*Un exercice extrait d'oraux et d'écrits de divers concours : E3A, CCP, centrale, Mines, X. Un classique par excellence. Ici les opérateurs nécessaires en coordonnées cylindriques sont rappelés mais l'équation de Navier Stokes toujours pas. Le profil de vitesse, rappelé dans cet énoncé, est appelé profil parabolique de Poiseuille. L'expression du débit en fonction de  $R$  et de la différence de pression appelle un commentaire. L'étude de l'artère était proposée dans un problème de l'X et l'analogie avec l'électrocinétique est faite dans les problèmes de plus en plus fréquemment.*

## 4.4 Ecoulement de miel sur un plan incliné

Du miel, fluide incompressible de masse volumique  $\mu$ , de viscosité dynamique  $\eta$  est étalé sur une surface plane en une épaisseur  $e$ . La plaque est alors inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. On suppose l'interface latérale (de hauteur  $e$ ) du miel initialement perpendiculaire au support. On suppose aussi le problème invariant dans la direction transverse. On admet que  $\vec{v} = v_x(x, y)\vec{u}_x$  où  $x$  est parallèle au support dans le sens de la pente et  $y$  perpendiculaire au support.

1. Montrer que la vitesse ne dépend pas de la composante  $x$ .
2. Calculer la pression.
3. Trouver l'équation de la vitesse du fluide.
4. Trouver les deux conditions aux limites de la vitesse. (Indication : à l'interface avec l'air, il n'y a pas de force tangentielle.)
5. Calculer la vitesse du fluide. Représenter ces variations en fonction de  $y$ . Commenter.
6. Calculer le débit volumique. Commenter.

*Commentaire :*

*Un exercice simple car en coordonnées cartésienne mais qui suppose des projections. La condition au limite sur l'interface air-miel est un peu plus difficile à établir mais l'indication est là pour guider. Les dernières questions sont faciles une fois la vitesse du fluide trouvée.*

## 4.5 Chute d'une bille dans la glycérine

L'expérience (que vous réaliserez en TP, et peut être au concours) consiste à faire tomber une bille d'acier de densité  $d_a = 7,8$ , de rayon  $R=0,5\text{cm}$  dans de la glycérine, fluide visqueux de densité  $d = 1,2$  et de viscosité de dynamique  $\eta$ .

L'expérience a été photographiée tous les  $1/4$  de seconde et doit permettre la détermination de la viscosité dynamique  $\eta$  de la glycérine.

1. Justifier par des observations expérimentales que la bille atteint un régime permanent.
2. Estimer le Reynolds de l'écoulement autour de la bille sachant que  $\eta \simeq 1$ . Quelle est alors l'expression de la force de trainée ?
3. Trouver l'équation différentielle dont est solution la vitesse  $v(t)$  de la bille.
4. Calculer la vitesse limite en régime permanent.
5. Trouver l'expression de  $v(t)$ . Faire apparaître un temps  $\tau$ . Combien de temps est nécessaire à l'apparition du régime permanent.
6. A partir des données, calculer le viscosité dynamique  $\eta$  de la glycérine.
7. Calculer l'énergie dissipée sur la hauteur de chute de  $24,2\text{cm}$  indiquée.

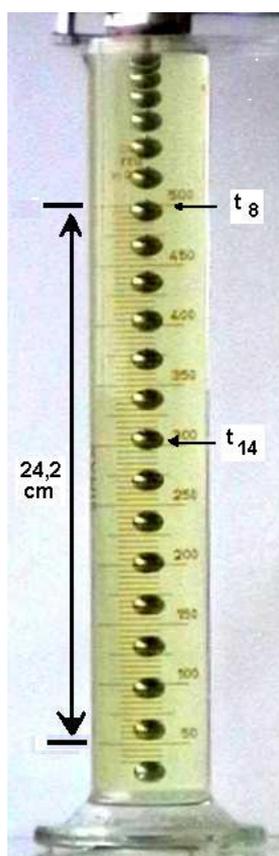


FIGURE 4.3 – Photos prises à intervalle de temps régulier de la chute d'une bille dans la glycérine.

*Commentaire :*

*Un exercice tombé aux écrits de CCP, extrait d'une expérience de TP. L'exercice fait intervenir à la fois la mécanique du solide et la mécanique des fluides. La résolution est très classique mais il ne faut oublier aucune force, en particulier la poussée d'Archimède. L'exercice est ici posée à partir d'une approche expérimentale donc de manière moderne.*

## 4.6 Viscosimètre de Couette.

Le viscosimètre de Couette est représenté sur la figure 4.4. Il est constitué de deux cylindres de même axe Oz. Le cylindre extérieur tourne à vitesse angulaire  $\omega_0$  constante. Le cylindre intérieur de rayon  $R=2,65\text{cm}$  est lui entraîné par viscosité. Il est aussi relié à une dynamomètre qui mesure la force exercée sur lui.

Entre les deux cylindres, une couche d'épaisseur  $e=2\text{mm}$  d'huile de paraffine est placée sur une hauteur  $H$ . La vitesse du fluide est supposée de la forme  $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{u}_\theta$  et que le champ de pression est  $p(r,z)$  dans le champ de pesanteur  $-g\vec{u}_z$  uniforme.

Les effets de bords sur le fond en  $z = 0$  et à l'interface fluide air  $z = H$  sont négligés, ce qui revient à supposer que l'écoulement est invariant suivant  $z$ .

La force surfacique de viscosité écrite dans ce système de coordonnées cylindriques est  $d\vec{F} = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) . dS \vec{u}_\theta$ .

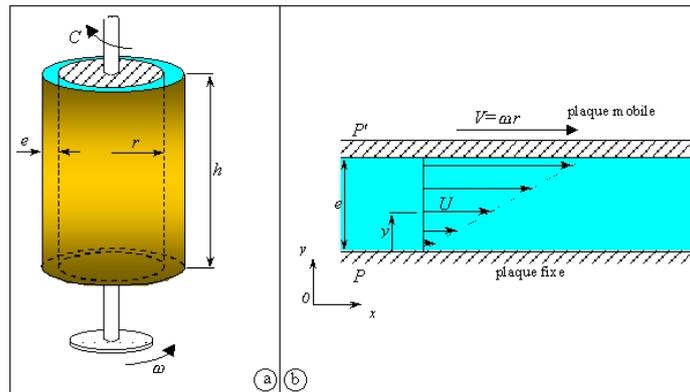


FIGURE 4.4 – Dispositif expérimental de Couette permettant la mesure de la viscosité du fluide entre les deux cylindres.

1. Calculer le moment de la force  $d\vec{F}$  par rapport à l'axe Oz pour une surface  $dS\vec{u}_r$ .
2. En déduire que le moment total par rapport à Oz est  $\Gamma(r) = 2\pi\eta r^3 H \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right)$
3. En appliquant le théorème du moment cinétique à la couche de fluide d'épaisseur  $dr$  comprise en  $r$  et  $r+dr$ , montrer que  $\Gamma(r)$  est indépendant de  $r$ , noté  $\Gamma_0$ .
4. En déduire l'expression de  $v_\theta(r)$  d'abord en fonction de  $\Gamma_0$  puis de  $R, e$ , et  $\omega_0$ .
5. En déduire l'expression de  $\Gamma_0$ .

6. Expliquer comment la lecture de la force sur le dynamomètre permet d'accéder à la valeur de  $\Gamma_0$ . En déduire alors  $\eta$  en fonction du module de la force  $F$  sur le dynamomètre (et des autres paramètres de l'expérience).

*Commentaire :*

*Un exercice très classique mais avec une approche originale. L'expérience permet de mesurer efficacement la viscosité d'un fluide. Cet exercice est à rapprocher du premier exercice de ce chapitre dans la mesure où le rapport  $\frac{e}{R} \ll 1$ , la géométrie cylindrique peut se ramener à celle du plan, géométrie beaucoup plus simple à traiter.*

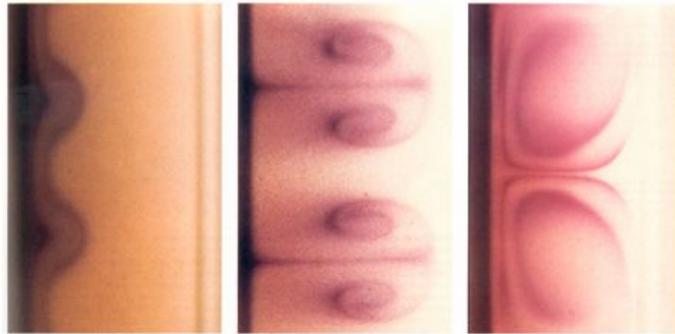


FIGURE 4.5 – Autres régimes observables dans le dispositif de Couette.



# Chapitre 5

## Bilan en mécanique des fluides parfaits.

### 5.1 Force de l'eau sur un coude de canalisation.

On s'intéresse à une canalisation de section  $S$  constante dans le plan horizontal faisant un coude à  $90^\circ$  : l'entrée est suivant l'axe  $x$  et la sortie suivant l'axe  $y$ . L'écoulement de l'eau dans le tuyau est supposée parfait, homogène et incompressible, stationnaire dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On note  $v_e$  le module de la vitesse à l'entrée (uniforme sur la section du fluide) et  $v_s$  le module de la vitesse à la sortie. De même,  $p_e$  et  $p_s$  désigne la pression dans le fluide respectivement à l'entrée et à la sortie.

1. Montrer que  $v_e = v_s$
2. En déduire que  $p_e = p_s$
3. Calculer la force qu'exerce l'eau sur le coude. Commenter

*Commentaire :*

*Un exercice de cours, qui montre la force du raisonnement par bilan en mécanique des fluides pour le régime stationnaire. Il n'est absolument pas nécessaire de connaître l'écoulement du fluide (champ de vitesse et champ de pression) dans la canalisation au niveau du coude, seule la connaissance des grandeurs d'entrée et de sortie permet de conclure. Enfin le but de l'exercice étant de calculer une force sur un objet, il doit être naturel de penser à un bilan de quantité de mouvement puisque les forces extérieures interviennent naturellement dans le Théorème de la Résultante Dynamique.*

### 5.2 La poussée d'une fusée.

On étudie une fusée qui décolle. Elle a donc un mouvement selon  $Oz$  et on suppose que le champ de pesanteur est uniforme (début de la phase de décollage, au voisinage du sol). Pour se propulser, la fusée éjecte de ses réservoirs du fluide avec un débit massique  $D_m$  constant et une vitesse relative (par rapport à la fusée donc)  $-u\vec{u}_z$ . On note donc  $m(t)$  la masse de la fusée.

1. Justifier la nécessité de se ramener à un système fermée pendant un interval de temps  $dt$ .
2. Trouver l'évolution de la masse de la fusée en fonction du temps :  $m(t)$ .

3. En supposant le champ de pression uniforme autour de la fusée, montrer que la vitesse de la fusée vérifie l'équation différentielle :  $m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = m(t) \vec{g} + D_m u \vec{u}_z$
4. En déduire  $v(t)$ . Commenter l'expression lorsque  $t \rightarrow \infty$

*Commentaire :*

*Cet exercice est un classique, qui tombe aux Oraux de CCP et Centrale. A noter que la notion de poussée est exclu du programme, aucune connaissance n'est exigible. L'exercice n'en demeure pas moins intéressant.*

### 5.3 Levitation d'une plaque sur un jet d'eau vertical.

Dans cet exercice, on souhaite étudier la possibilité qu'une plaque horizontale cylindrique de masse volumique  $\mu$  d'épaisseur  $a$  et de rayon  $R$  lévite dans un jet d'eau vertical vers le haut (l'axe du jet d'eau est confondu avec l'axe du cylindre).

L'eau sort du tuyau à la pression  $p_0$  et avec la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$  à travers une section  $S_0 = \pi r_0^2$ . Le long du cylindre sur lequel l'eau coule, l'écoulement est supposé radial (pour  $r > r_0$ ) sur une épaisseur  $e$ .

La masse volumique de l'eau est noté  $\rho$ .

1. Calculer  $v(r = R)$
2. Calculer la force qu s'exerce sur la plaque de la part de l'écoulement d'eau
3. En déduire la vitesse  $v_0$  pour faire léviter la plaque.

*Commentaire :*

*Cet exercice est la reprise d'un exercice déjà traité dans le chapitre sur les écoulements parfaits mais par une autre approche (approche locale) que celle proposée ici (approche par bilan). Il est intéressant de reprendre l'énoncé du chapitre 2 et sa résolution pour bien voir les avantages et inconvénients de l'approche par les bilans. Tout l'intérêt des raisonnements sur bilan est ici visible car il n'y a d'approximation sur l'écoulement et le résultat est ici exacte, alors que le résultat de l'exercice précédent approché.*

### 5.4 Inverseur de poussée

Les inverseur de poussée sont utilisées sur les avions à réactions lors de la phase de décélération à l'atterrissage. Il s'agit de déflecteur qui redirige le fluide sortant du réacteur vers l'avant de l'appareil.

1. Expliquer qualitativement que l'inverseur de poussée freine l'appareil.
2. On suppose que le l'inverseur de poussée est une demi sphère de rayon  $R$ . L'air sort du réacteur à une vitesse  $v_0$  sur une section  $s_0$ . Déterminer la force de freinage que génère l'inverseur de poussée.

*Commentaire :*

*Cet exercice repose sur un système qui équipe effectivement les avions. Son efficacité est prouvée*



FIGURE 5.1 – Inverseur de poussée.

*même s de nombreuses pannes ont été déplorés sur ces derniers (leur mise en place n'est pas aisée et l'électronique de l'appareil analyse mal les réactions de l'avion.) Il s'agit d'un bilan de quantité de mouvement puisque une force est cherchée.*

## 5.5 Le tourniquet hydraulique



FIGURE 5.2 – Le tourniquet hydraulique.

Un tourniquet hydraulique possède deux bras identiques  $OA$  et  $OB$  de longueur  $R$  et de section  $S$ . Chaque bras est terminé par un tube de même section  $S$  faisant avec le bras un angle  $\alpha$  se terminant respectivement en  $A'$  et  $B'$ , de longueur négligeable  $\ll R$ . L'eau, supposée incompressible, est injectée dans le tourniquet hydraulique par le tube centrale de section  $2S$  avec un débit volumique  $D_v$  constant.

On note  $J$  le moment d'inertie par rapport à l'axe  $Oz$  du tourniquet

On notera  $\vec{\Omega} = \Omega(t)\vec{u}_z$  le vecteur rotation du tourniquet.

1. Calculer la vitesse déjection du fluide en  $A'$  dans le référentiel du laboratoire sachant que la vitesse d'éjection du fluide par rapport au tourniquet est noté  $v\vec{u}'$ .
2. Calculer  $v$  en fonction de  $D_v$
3. Montrer que le moment cinétique sur  $Oz$  du système (qui n'est pas en régime stationnaire) est  $\frac{DL_z}{Dt} = J\frac{d\omega}{dt} + \mu D_v(R^2\Omega - Rv \sin(\alpha))$
4. Trouver l'équation dont  $\Omega(t)$  est solution. La résoudre sachant que le système est initialement immobile.

*Commentaire :*

*Cet exercice est un classique, tombé aux écrits et aux oraux. Son originalité réside dans l'utilisation du théorème du moment cinétique. Si les bilans d'énergie et de quantité de mouvement (pour calculer des forces) sont courants, les bilans de moment cinétique sont plus rares, ils interviennent pour des solides en rotations comme l'éolienne.*

## 5.6 Le théorème de Torricelli.

On s'intéresse au dispositif de Torricelli (à l'origine mis en place pour les lances à incendies des pompiers et les fontaines de sa ville) : un cylindre de rayon  $R$  sert de réserve d'eau et est remplie sur une hauteur  $h$ . En bas de ce cylindre, un tube de longueur  $L$  et de rayon  $r \ll R$  conduit jusqu'à une ouverture libre duquel l'eau s'éjecte.

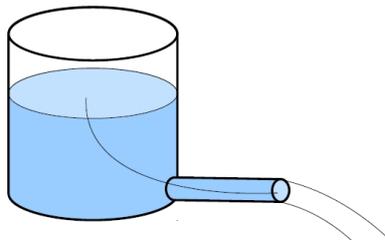


FIGURE 5.3 – Ecoulement de Torricelli.

On s'intéresse au régime permanent de l'écoulement. Montrer que la vitesse d'éjection des particules de fluides à l'extrémité du petit tube est  $v = \sqrt{2gh}$  par une méthode de bilan. Commenter cette valeur.

*Commentaire :*

*Cet exercice est une applicatio directe du cours. Il faut penser à faire le lien entre l'équation de Bernoulli et les bilans énergétiques, comme dans le cours. Par la méthode du bilan, l'interprétation de la vitesse de chute libre est plus naturelle. L'exercice conserve tout son intérêt car il faut réfléchir à quel "bilan" utilisé. Ici le bialn énergétique est à priviligier car  $P(\text{force int non conservative})=0$  et  $P(\text{force ext non conservative})=0$ .*

## 5.7 Onde de choc dans une canalisation.

Considérons une canalisation horizontale d'axe Ox, de section S constante dans laquelle l'écoulement est supposé stationnaire de vitesse  $\vec{v}_1 = v\vec{u}_x$ . Si on ferme brutalement la conduite en  $x=0$ , on constate que l'écoulement ne s'arrête pas instantanément partout. Il existe donc deux zones d'écoulement différent : une zone 1 où le fluide continue de couler  $\vec{v}_1 = v\vec{u}_x$  et une zone 2 où le fluide est immobile  $\vec{v}_2 = \vec{0}$ . L'interface entre les deux écoulements, supposée perpendiculaire au tube, se déplace à la vitesse  $-c\vec{u}_x$ , ( $c \gg v$ ) ce qui signifie que la zone 2 "grandit" et que la zone 1 "diminue". Ce phénomène correspond à une onde de choc (propagation d'une discontinuité de la vitesse). En plus de la discontinuité de vitesse de part et d'autre de l'écoulement, on observe que  $\mu_1 \neq \mu_2$  et  $P_1 \neq P_2$ .

1. On se place dans le référentiel R' lié à l'onde de choc. Justifier que le référentiel R' est galiléen et exprimer la vitesse du fluide dans la zone 1  $v'_1$  et 2  $v'_2$  dans R'.
2. Considérons une surface de contrôle comprise entre deux sections du tube, l'une en amont, l'autre en aval de l'onde de choc. Ce système est un système ouvert. Définir le système fictif fermé  $S^*$  pendant dt. Justifier que ce système fictif fermé soit en régime stationnaire.
3. Par un bilan de matière, montrer que  $\mu_2 c = \mu_1(c + v)$
4. Par faisant un bilan de quantité de mouvement, montrer que  $\mu_2 c^2 - \mu_1(c + v)^2 = p_1 - p_2$
5. Justifier que pour un écoulement parfait, l'évolution est isentropique. L'évolution de la masse volumique est alors caractérisé par le coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_S = \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_S$  est. En supposant le fluide peu compressible, montrer que  $\mu_2 - \mu_1 = \chi_S \mu_1 (p_2 - p_1)$
6. En exploitant les trois équations précédentes, montrer que  $c \simeq \sqrt{\frac{1}{\mu_1 \chi_S}}$
7. AN avec  $\chi_S = 5.10^{-10} Pa^{-1}$ . Commenter la valeur de c trouver.
8. Calculer  $p_2$  et  $\mu_2$ . Commenter.

*Commentaire :*

*Cet exercice est un extrait de problème sélectif. Cet exercice s'intéresse pour la première fois à un fluide compressible. Dans ce cas, comme nous nous le reverons pour les ondes acoustiques, il faut une équation en plus (car il y a une inconnue en plus). Il faut donc passer par une équation thermodynamique. Cette démarche est importante et repose sur des arguments physiques. Un exercice très riche. L'onde de choc s'entend dans les vieilles installations d'eau lorsque l'on ferme violemment un robinet et elle peut provoquer des fuites. Cette onde de choc est par contre mise à profit dans les pompes à onde de choc de Montgolfier.*

## 5.8 Tuyère subsonique/supersonique.

On s'intéresse à une tuyère possédant un axe de révolution Ox et dont la section évolue selon une loi S(x). On suppose que l'écoulement dans cette tuyère est stationnaire, quasi unidimensionnel donc caractérisé par une vitesse  $\vec{v} = v(x)\vec{u}_x$ , une pression  $p(x)$  et une masse volumique  $\mu(x)$  (le fluide est donc compressible) à laquelle on substituera la température  $T(x)$ .

1. Traduire les trois équations couplées faisant intervenir les 3 champs en appliquant une méthode de bilan pour l'équation bilan de matière et l'équation d'évolution. (L'équation thermodynamique restant locale)
2. Etablir alors que  $(1 - \frac{v^2}{c^2})v \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{v^2}{S} \frac{dS}{dx}$  où  $c = \frac{\gamma P}{\mu} = \frac{\gamma RT}{M}$  désigne la vitesse du son.
3. Si le nombre de Mach  $M = \frac{v}{c}$  est inférieur à 1, quelle doit être la forme de la tuyère pour que  $v(x)$  soit une fonction croissante.
4. Si le nombre de Mach  $M = \frac{v}{c}$  est supérieur à 1, quelle doit être la forme de la tuyère pour que  $v(x)$  soit une fonction croissante.
5. Commenter alors la forme de la tuyère 5.4.

*Commentaire :*

*Un exercice extrait de Centrale. Cet exercice est la reprise d'un exercice déjà traité dans la partie sur les fluides parfait. L'idée est ici d'appliquer une méthode globale pour l'équation de conservation et l'équation d'évolution puisqu'ainsi les approximations sont mieux maîtrisées : il faut faire le premier principe, bilan d'énergie pour les systèmes ouverts en régime permanent.*



FIGURE 5.4 – Tuyère de fusée en sortie de la chambre de combustion.

## 5.9 Bistable hydraulique.

Deux réservoirs de même section  $S$  contiennent de l'eau et communiquent au niveau de leur base par un tuyau en caoutchouc de section  $s \ll S$  horizontal. Une ouverture est faite dans ce tuyau et un lame de liège de surface  $s' > s$ , est plaquée contre la partie droite du tuyau et le bouche, l'eau s'écoule alors dans le réservoir de gauche et maintient le liège plaqué.

1. Exprimer la force  $\vec{F}_d$  exercée par l'eau du compartiment de droite et la force  $\vec{F}_a$  exercée par l'air sur la plaque de liège
2. Exprimer la vitesse d'éjection de l'eau et la force  $\vec{F}_g$  exercée par l'eau du compartiment de gauche sur la plaque de liège
3. A quelle condition la plaque de liège reste-t-elle plaquée ?

4. Quel est le mouvement ultérieur ? Commenter le nom de l'expérience ?

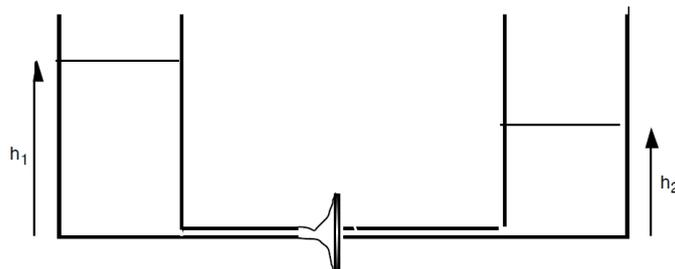


FIGURE 5.5 – La plaque de liège plaquée par l'écoulement du premier réservoir empêche l'écoulement du second reservoir.

*Commentaire :*

*Un exercice extrait de Centrale. Il n'est pas difficile et constitue un bon exercice de révision pour l'oral sur la méthode des bilans en mécanique des fluides.*

## 5.10 Soufflerie

Une soufflerie est modélisée par une tuyère convergente de diamètre d'entrée  $d_e = 40\text{cm}$  et de diamètre de sortie  $d_s = 15\text{cm}$ , la vitesse d'entrée du fluide est très faible, la vitesse de sortie est elle  $v_0 \simeq 20\text{m.s}^{-1}$ . Les effets de pesanteur sont négligés.

L'écoulement de l'air est supposé parfait et incompressible, de masse volumique  $\mu = 1,3\text{kg.m}^{-3}$ .

1. Déterminer la différence de pression de part et d'autre de l'hélice.
2. Calculer la puissance à fournir à l'hélice.

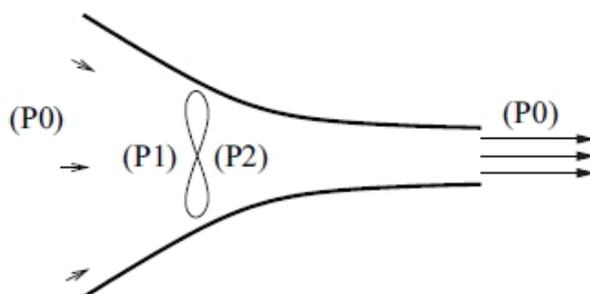


FIGURE 5.6 – Etude de la puissance de la soufflerie.

*Commentaire :*

*Un exercice extrait de CCP, classique.*

## 5.11 Turbine Pelton

Un auget se déplace à la vitesse uniforme  $\vec{u} = u\vec{u}_x$  dans le référentiel du laboratoire. Un jet d'eau de section  $s$  supposée invariante frappe l'auget avec une vitesse  $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$ . La forme de l'auget est telle que le fluide est dévié et renvoyé .

L'écoulement de l'eau est supposé parfait et incompressible, de masse volumique  $\mu$  et on néglige les effets de la pesanteurs.

1. Calculer la force  $\vec{f}$  exercée par le jet d'eau sur l'auget.
2. Définir le rendement. A quelle condition est il maximal ?
3. Faire une recherche internet expliquant le titre de l'exercice.

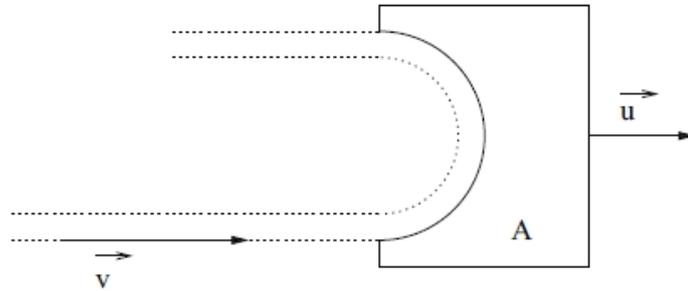


FIGURE 5.7 – Etude du mouvement d'un auget propulsé par un jet d'eau.

*Commentaire :*

*Un exercice extrait de CCP, classique. L'idée du changement de référentiel doit être naturelle.*

# Chapitre 6

## Onde sonore.

### 6.1 Equation de propagation d'une onde sonore.

Dans un fluide au repos, le champ de vitesse d'une particule du fluide  $\vec{v}(M, t) = \vec{0}$  (même si les molécules ont une vitesse, comme le mouvement est désordonné, en moyenne, la vitesse est bien nulle) la pression est uniforme  $p_0$  (sur des échelles pas trop grandes en  $z$  tout du moins) et la masse volumique aussi  $\mu_0$ .

En présence d'une onde sonore, il apparaît un mouvement ordonné des particules  $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$ , champ de vitesse eulérien qui dépend de l'espace et du temps, une pression acoustique  $p_1(\vec{r}, t)$  (soit une pression totale  $p_{tot} = p_0 + p_1(\vec{r}, t)$ , le pression fluctue donc autour de la valeur moyenne  $p_0$  qui est la valeur à l'équilibre) et une fluctuation de la masse volumique  $\mu_1(\vec{r}, t)$  (soit une masse volumique totale  $\mu_{tot} = \mu_0 + \mu_1(\vec{r}, t)$ ).

1. Rappeler l'approximation acoustique.
2. Ecrire les trois équations nécessaires à l'étude des trois champs précédent (en justifiant l'importance de chacune des équations).
3. En utilisant l'approximation acoustique, linéariser ces équations et montrer que l'on obtient alors des **équations couplées aux dérivées partielles du premier ordre**  
Commenter alors l'approximation acoustique.
4. Obtenir l'équation de propagation de  $p_1$ , **équation découplée aux dérivées partielles du second ordre**.  
(Rappel d'analyse vectorielle  $\vec{div}(\vec{grad}) = \Delta$  laplacien)
5. Montrer que l'écoulement est irrotationnel et obtenir l'équation de propagation de  $\vec{v}_1$ , **équation découplée aux dérivées partielles du second ordre**  
(Rappel d'analyse vectorielle  $\vec{rot}(\vec{rot}) = \vec{grad}(\vec{div}) - \Delta \vec{Delta}$ )
6. Commenter l'expression de la vitesse de propagation des ondes (en rappelant la valeur de la vitesse du son dans l'air et dans l'eau). Montrer que dans le cas d'un gaz parfait :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

et retrouver alors la valeur de la vitesse du son dans l'air à 300 K.

7. Traduire l'équation de propagation pour une OPPH de la forme  $\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \varphi)$ . Trouver la relation de dispersion.
8. Justifier le caractère longitudinal de l'onde.
9. Montrer alors que pour une OPPH se déplaçant dans la direction  $\vec{u}$ , on a l'impédance acoustique

$$Z_+ = \frac{p_1}{v_1} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu}{\chi_s}}$$

Généraliser ce résultat pour une OPP.

10. Que dire de  $Z_-$  ?

*Commentaire :*

*Cet exercice est un extrait de problème (première partie) mais il ne reprend que des éléments de cours. Les problèmes sur les ondes sonores restent souvent très proches du cours. Un exercice d'entraînement donc, sans aucune difficulté. La traduction de l'équation pour une OPPH suppose implicitement de se placer en coordonnées cartésiennes et donc d'utiliser l'opérateur nabla.*

## 6.2 Propagation du potentiel associé à l'onde sonore

On cherche à établir l'équation qui régit le phénomène de propagation du son. Les ondes acoustiques sont des ondes de pression se propageant dans un fluide compressible : Le phénomène est spatio-temporel et donc à priori non stationnaire. De plus le fluide doit être compressible. On considérera l'écoulement irrotationnel : l'écoulement est donc potentiel :  $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$ . On s'intéresse aux ondes acoustiques se propageant dans un gaz parfait diatomique dont le coefficient  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$ . De plus, on considérera que les ondes de pression sont suffisamment rapides pour que les compressions (ou détentes) locales soient adiabatiques ; ces surpressions étant de faible amplitude on considérera que le fluide subit une onde de compression adiabatique quasi-réversible.

1. Ecrire les équations vérifiées par le champ de pression  $P(x, y, z, t)$ , le champ de vitesse  $\vec{v}(x, y, z, t)$  et la masse volumique  $\mu(x, y, z, t)$ . Vérifiez qu'il y a autant d'inconnues que d'équations.

2. Lors du passage de l'onde les grandeurs subissent des petites fluctuations :

$$P = P_0 + \delta P(x, y, z, t)$$

$$\mu = \mu_0 + \delta \mu(x, y, z, t)$$

On se propose de faire la théorie linéaire de l'acoustique. En effet, les équations précédentes se linéarisent si les fluctuations sont faibles. Supposons une onde acoustique de période  $T$  et de longueur d'onde  $\lambda$ . À l'aide d'un calcul d'ordre de grandeur, montrez que l'on peut négliger le terme non linéaire (terme convectif) devant le terme instationnaire à condition que  $v \ll c_s$  où  $c_s$  est la célérité des ondes acoustiques.

3. On suppose l'écoulement irrotationnel. Montrez à l'aide des équations linéarisées que le potentiel des vitesses obéit à l'équation de D'Alembert.
4. Calculer la vitesse de propagation des ondes acoustiques pour un gaz parfait diatomique. Application numérique à 20°C.

5. La sensation auditive n'est pas linéaire mais varie de façon logarithmique (loi de Fechner). On définit alors l'intensité acoustique comme le logarithme du rapport de deux amplitudes de pression :  $I_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{\delta P}{\delta P_0}\right)$  où  $\delta p_0$  est le seuil d'audibilité à 1000 Hz :  $\delta p_0 = 2 \cdot 10^{-5} Pa$ . Un appareil produit un son de fréquence  $f = 1000 \text{ Hz}$  et d'intensité  $I = 60 \text{ dB}$ . Calculez  $\delta P$  ainsi que l'amplitude de la vitesse. Quel est l'amplitude du déplacement des particules de fluide ?

*Commentaire :*

*Cet exercice est un extrait de problème très très proche du cours quoi que un peu différent puisque c'est le potentiel associé à l'écoulement qui est étudié. Le problème suggère la encore d'utiliser les coordonnées cartésiennes et donc d'utiliser l'opérateur nabla.*

## 6.3 Propagation d'une onde sonore plane progressive harmonique.

Dans ce problème, on souhaite étudier la propagation d'une onde sonore plane progressive harmonique dans l'air, assimilé à un gaz parfait diatomique.

Au repos, en l'absence d'onde sonore, le milieu est décrit par les champs suivants :

$$\vec{v}(M, t) = \vec{0}$$

$$P(M, t) = P_0 \text{ pression uniforme dans le gaz.}$$

$$\mu(M, t) = \mu_0 \text{ masse volumique uniforme dans le gaz.}$$

En présence de l'onde, il apparaît une perturbation de type ondulatoire, infiniment petite :

$$\vec{v}(M, t) = \vec{v}_1(x, t)$$

$$P(M, t) = P_0 + P_1(x, t)$$

$$\mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(x, t)$$

On se limitera à des développements à l'ordre 1 pour les champs qui traduisent la perturbation.

- Justifier que la pression et la masse volumique puissent être considérées comme uniformes dans le fluide au repos. Quel terme est négligé ?  
L'influence du champ de pesanteur est négligé dans tout le problème.
- Ecrire les équations linéaires vérifiées par les champs ondulatoires  $P_1(x, t)$ ,  $\vec{v}_1(x, t)$  et  $\mu_1(x, t)$ .
- Justifier que l'utilisation de grandeur complexe est licite pour l'étude de la propagation.

On cherche alors des solutions de la forme :

$$\vec{v}_1(x, t) = \vec{v}_M \exp(j\omega t - kx)$$

$$P_1(x, t) = \underline{P}_M \exp(j\omega t - jkx) = P_M \exp(j\omega t - jkx + j\phi)$$

$$\mu_1(x, t) = \underline{\mu}_M \exp(j\omega t - jkx) = \mu_M \exp(j\omega t - jkx + j\phi)$$

- Traduire les équations obtenues à la question 1.
- Montrer que l'onde sonore est longitudinale.

6. Trouver la relation de dispersion de l'onde. Calculer la célérité de l'onde en fonction du coefficient de compressibilité isentropique. (Justifier le choix de ce coefficient plutôt que du coefficient de compressibilité isotherme.)
7. Calculer la célérité de l'onde en fonction du paramètre  $\gamma$  et faire l'application numérique à 20°C.
8. Calculer  $\varphi$ ,  $\phi$ ,  $P_M$  et  $\mu_M$  en fonction de  $v_M$ .
9. Calculer alors l'énergie volumique sonore de cette onde.
10. Calculer le vecteur densité de flux sonore et l'exprimer à l'aide du résultat de la question précédente.
11. L'intensité acoustique en décibel est nulle pour un son à la limite de l'audible à 1000Hz. Déterminer alors les caractéristiques de l'onde  $v_M$ ,  $P_M$  et  $\mu_M$ . Commenter

*Commentaire :*

*Cet exercice est un extrait de plusieurs problèmes reformulés ici (CCP et centrale). Il diffère un peu du cours dans la mesure où il exploite très tôt l'OPPH. Néanmoins il fait tous les résultats du cours. A noter que l'intensité de référence n'est pas rappeler pour l'application numérique de la dernière question.*

## 6.4 Réflexion et transmission d'une onde sonore à une interface sous incidence normale.

Considérons l'interface plane infinie située en  $x=0$  entre deux milieux, d'impédance respective  $Z'$  (pour  $x < 0$ ) et  $Z''$  ( $x > 0$ ). Une onde sonore plane arrive de  $x = -\infty$  sous incidence normale. Cette onde va donner naissance à une réfléchié et une onde transmise à l'interface.

Le champ de vitesse associé à l'onde sonore dans le milieu' est

$$v_1' = v_i \exp(j(\omega t - k'x)) + \underline{v_r} \exp(j(\omega t + k'x))$$

, superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchié.

Le champ de vitesse associé à l'onde sonore dans le milieu'' est

$$v_1'' = \underline{v_t} \exp(j(\omega t - k''x))$$

1. Calculer le champ de pression acoustique dans chacun des deux milieux.
2. Trouver les conditions aux limites à l'interface.
3. Calculer les coefficients de réflexion et en transmission en amplitude.
4. Après avoir rappler l'expression du vecteur de Poynting sonore, en déduire les coefficients de réflexion et en transmission en puissance.
5. Commenter le cas où  $Z' \simeq Z''$ , nommer adaptation d'impédance.
6. Commenter le cas où  $Z' \simeq 10^{-2}.Z''$ .

*Commentaire :*

*Cet exercice, comme les précédents, est un extrait de problème. Il ne reprend que des éléments de cours. Les problèmes sur les ondes sonores restent souvent très proches du cours. Un exercice d'entraînement donc, sans aucune difficulté.*

## 6.5 Puissance acoustique rayonnée par un tuyau.

Un tuyau cylindrique de longueur  $L$  et de rayon  $R$  est ouvert à son extrémité  $x = L$  et fermé en  $x = 0$  par une membrane vibrante à laquelle on impose un mouvement oscillatoire sinusoïdal de vitesse  $v_m = v_0 \cos(\omega t)$ .

L'amplitude du mouvement est supposée très faible par rapport à la longueur d'onde.

On note  $c$  la célérité des ondes sonores et  $\mu$  la masse volumique du fluide au repos.

1. Justifier l'utilisation d'une OPS dans la recherche de la solution du problème.

2. On propose alors pour le champ de pression la forme suivante :

$$p = p_0 + P_1 \sin(k(x - L)) \cos(\omega t + \varphi)$$

Commenter la forme proposée.

3. Déterminer alors le champ de vitesse de l'onde sonore.

4. Calculer l'amplitude des ondes en exploitant les CL sur la membrane.

5. Calculer alors le taux de rayonnement de ce tube  $T = \frac{P(x=L)}{P(x=0)}$  où  $P$  désigne la puissance sonore.

*Commentaire :*

*Cet exercice est un grand classique, librement inspiré de problème d'écrit et d'oraux. Il se réfère au cas des instruments à vent, ce qui justifie son importance. Les calculs ne sont pas difficiles mais font référence aux OPS, pour lesquelles aucune exigence ne fait partie du programme. Il faut donc se ramener au cas des OPPH et utiliser la notion d'impédance.*

## 6.6 onde sonore sphérique.

Une sphère pulsante (mini haut parleur) de centre  $O$  a un rayon  $a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$  émet une onde sonore sphérique dans toutes les directions de l'espace : il s'agit donc d'une onde sonore sphérique. Cette onde sonore est telle que  $a_1 \ll a_0 \ll \lambda$ .

1. A partir des symétries du problème, justifier qu'en coordonnées sphériques, l'onde sonore va être décrite par des champs de la forme suivante :

$$\text{Pour la pression, } p_1(M, t) = p_1(r, t)$$

$$\text{Pour la vitesse, } \vec{v}_1(M, t) = v_1(r, t) \vec{u}_r$$

2. Rappeler sans démonstration l'équation de d'Alembert dont est solution la pression  $p_1$ .

Pour un champ scalaire  $f(r, t)$  ne dépendant ni de  $\theta$ , ni de  $\varphi$  en coordonnées sphériques, le Laplacien est  $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \cdot f}{\partial r^2}$

3. Justifier alors que le champ de pression sonore peut s'écrire  $p_1(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - k \cdot r - \alpha)$  avec  $k = \frac{\omega}{c}$ .

4. Déterminer l'expression de la vitesse  $\vec{v}_1$ .

$$\text{Montrer qu'en champ proche, pour } r \ll \lambda, \vec{v}_1(r, t) = \frac{A}{\mu_0 \omega r^2} \sin(\omega t - k \cdot r - \alpha)$$

$$\text{Montrer que dans la zone de rayonnement, pour } r \gg \lambda, \vec{v}_1(r, t) = \frac{k \cdot A}{\mu_0 \omega r} \cos(\omega t - k \cdot r - \alpha)$$

5. Avec la condition au limite sur la sphère, en déduire  $A$  et  $\alpha$ .
6. Calculer la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r \gg \lambda$ . Commenter alors la dépendance en  $\frac{1}{r}$  des champs dans la zone de rayonnement. Un son aigu est il mieux rendu ou moins bien rendu qu'un son grave par ce "haut-parleur".

*Commentaire :*

*Cet exercice est un très grand classique, tombé aux écrits de concours. L'énoncé proposé ici est suffisamment directif pour réussir la résolution. Les commentaires sont riches en physique et la décroissance du champ en  $1/r$  particulièrement importante à comprendre. L'onde électromagnétique émise par un dipôle aura des propriétés similaires. La conclusion sur la qualité du son émis par les enceintes est aussi intéressant.*

## 6.7 Effet de la gravité sur les ondes sonores verticales.

On s'intéresse à la propagation d'une onde sonore selon l'axe  $Oz$  verticale ascendante, et on cherche à prendre en compte l'effet de la gravité sur la propagation de l'onde.

1. Etablir alors l'expression de la pression  $p_0(z)$  et  $\mu_0(z)$  en l'absence d'onde sonore dans le modèle de l'atmosphère (gaz parfait) isotherme à  $T_0$ .
2. A l'aide de l'approximation acoustique, trouver les trois équations partielles couplées linéaires dont  $p_1(z, t)$ ,  $\mu_1(z, t)$  et  $v_1(z, t)$  sont solutions.
3. Montrer alors que par élimination on trouve l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \gamma g \frac{\partial v_1}{\partial z} - \gamma \frac{g^2}{c^2} v_1$$

Commenter

4. Etablir alors la relation de dispersion.
5. Calculer  $k$  en vous appuyant sur des ordres de grandeurs réalistes. Commenter.
6. Calculer l'énergie cinétique moyenne d'une particule de fluide. Commenter.

*Commentaire :*

*Cet exercice aborde des modifications par rapport au cas idéal du cours et il est logique que l'équation diffère de l'équation de d'Alembert. Il y a donc dispersion absorption. La première question est une reprise d'un exercice de statique des fluides de première année. L'étape de linéarisation est délicate ici car il demeure de nombreux termes d'ordre 1 et les termes d'ordre 0 ne sont pas contrairement à d'habitude uniforme. Attention donc dans l'étape de linéarisation. Néanmoins, en cas de problème, il ne faut hésiter comme toujours à repartir de l'équation proposée par l'énoncé.*

## 6.8 Onde acoustique dans un fluide parfait en mouvement.

On considère l'air, fluide compressible non visqueux, animé d'un mouvement d'ensemble à la vitesse  $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_x$  uniforme et constante par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen.

On souhaite étudier la propagation d'une onde acoustique plane dans ce fluide suivant l'axe Ox.

On note  $P_0$  et  $\rho_0$  la pression statique et la masse volumique au repos du fluide.

1. On note  $\vec{v}(x, t) = v(x, t) \vec{e}_x$  le champ eulérien des vitesses des mésoparticules fluides dû à la perturbation acoustique par rapport au fluide au repos. Ecrire ce même champ des vitesses  $\vec{v}_{tot}$  dans le référentiel du laboratoire.
2. Ecrire les équations du mouvements dans le cadre de l'approximation acoustique.
3. En déduire que le champ de pression  $p_1$  dû à l'onde acoustique obéit à l'équation suivante :

$$(c^2 - V_0^2) \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 2V_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t \partial x}$$

4. En déduire la relation de dispersion pour une OPPH. Commenter par rapport à votre expérience personnelle : "le vent transporte le son".

*Commentaire :*

*Cet exercice est un très grand classique, tombé aux écrits de concours. Il faut donc revenir aux équations de départ et les linéariser. Tout l'intérêt de cet exercice réside dans cette étape très physique. La suite est un peu plus calculatoire et aboutit à une relation de dispersion qui diffère de celle de d'Alembert, donc à de la dispersion.*

## 6.9 Critère d'incompressibilité des écoulements parfaits stationnaires.

On s'intéresse aux écoulements dans un fluide compressible décrit par les champs (eulérien) suivant : champ de vitesse  $\vec{v}(M)$ , champ de pression  $p(M)$  et champ de masse volumique  $\mu(M)$ . Les champs sont stationnaires.

1. Ecrire l'équation de conservation de la matière dans le cas stationnaire.
2. Ecrire l'équation d'Euler dans le cas stationnaire en négligeant l'influence du poids.
3. Ecrire l'équation traduisant l'évolution isentropique du fluide compressible.
4. Par une analyse en ordre de grandeur, montrer que  $\text{div}(\vec{v}) \simeq 0$ , donc que le fluide peut être considéré comme incompressible si  $v \ll c$  en régime stationnaire.

*Commentaire :*

*Cet exercice n'est pas à proprement parlé un exercice sur les ondes sonores mais les outils mis en place sont ceux de la mécanique des fluides compressibles étudiée au travers des ondes sonores dans le cours. Il justifie un argument que nous avons souvent utilisé pour justifier que l'écoulement de l'air (autour de l'aile d'avion par exemple) reste incompressible pour les écoulements subsoniques.*

## 6.10 Effet Doppler Sonore.

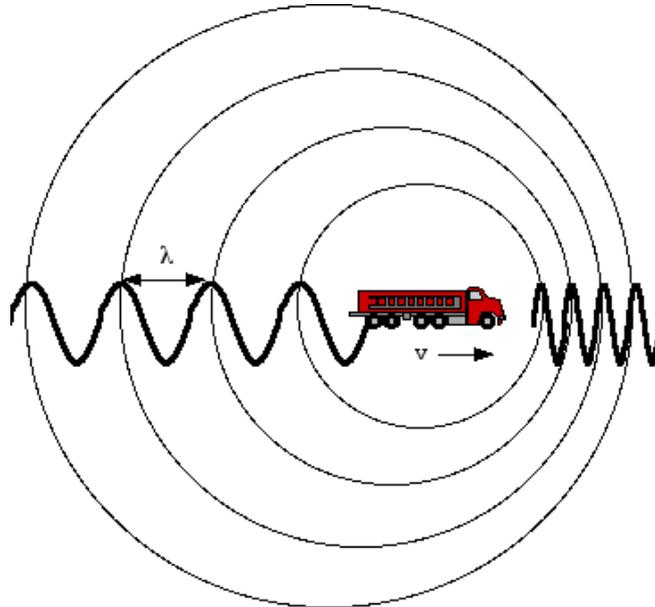


FIGURE 6.1 – Effet Doppler sonore

1. Quelle est votre sensation sonore quand une ambulance passe à côté de vous, toute sirène hurlante ?
2. Imaginons une source S qui émet des bips sonores à intervalle de temps régulier  $T_S$  en se déplaçant à la vitesse  $v_s$  vers un récepteur R se situe sur la trajectoire rectiligne de la source. Le son se propage à la vitesse  $c$ .  
Un premier bip est émis par la source à une date  $t_1$ . A cette date, la source et le récepteur sont distants de  $d$ . Calculer la date  $t'_1 =$  à laquelle le bip est perçu par le récepteur.  
Un second bip est émis par la source à une date  $t_2 = t_1 + T_S$ . Calculer la date  $t'_2$  où le bip est perçu par le récepteur d'abord en fonction  $d, v_s, t_1$  et  $T_S$  puis en fonction de  $t'_1, v_s,$  et  $T_S$   
En déduire alors la période  $T_R$  et fréquence  $f_R$  à laquelle le récepteur perçoit donc les bips.
3. Justifier brièvement que la formule générale est alors dans le cas d'un récepteur fixe :

$$f_R = \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}_S \cdot \vec{u}_{S \rightarrow R}}{c}} \cdot f_S$$

Que se passe-t-il quand  $v_s \rightarrow c$ ? Commenter par rapport à votre expérience personnelle ?

4. Dans un cas plus général, la source et le récepteur peuvent être en mouvement l'un par rapport à l'autre. Nous nous limiterons au cas où les mouvements s'effectuent toujours sur la droite Source-Récepteur que nous nommerons axe  $\vec{u}_x$ . Dans ce cas, la vitesse (algébrique) de la source est  $v_S$  et celle du récepteur est  $v_R$ .

Pour trouver la formule de l'effet Doppler, l'idée est de se ramener à la situation précédente par un changement de référentiel. On se place donc dans le référentiel R' où le récepteur est fixe. Dans ce référentiel R', calculer la vitesse  $v'_s$  de la source et la vitesse  $c'$  de l'onde sonore. En déduire la fréquence  $f_R$  en fonction de  $f_s$ ,  $v_s$  et  $v_r$ .

5. Calculer le décalage relatif en fréquence, dû à l'effet Doppler  $\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_R - f_s}{f_s}$  dans le cas où les vitesses de déplacements sont faibles devant la vitesse  $c$  de l'onde.

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_R - f_s}{f_s} \simeq \frac{(\vec{v}_S - \vec{v}_R) \cdot \vec{u}_{S \rightarrow R}}{c}$$



FIGURE 6.2 – Passage en supersonique et onde de choc sonore.

*Commentaire :*

*Cet exercice, très guidé, traite d'un effet important pour la culture scientifique, aux nombreuses applications mais qui ne figure pas au programme. Il n'est pourtant pas rare que des concours abordent le sujet. Aucun résultat n'est exigible (aucune formule) mais quelques idées peuvent vous aider à débiter dans un problème traitant du sujet ou à répondre à des questions en ADS. L'idée à retenir est la suivante : le rapprochement relatif de la source et du récepteur fait augmenter la fréquence reçue (décalage vers les sons aigus) ; l'éloignement relatif de la source et du récepteur fait diminuer la fréquence reçue (décalage vers les sons graves). Il est à noter que l'effet existe aussi pour les ondes lumineuses mais dans ce cas les démonstrations faites ne tiennent pas, seul le résultat approché sur le décalage en fréquence reste vrai. Le "redshift" est La Grande Preuve Expérimentale de l'expansion de l'Univers.*

## 6.11 Deux interprétations de l'onde sonore dans le tuyau.

Un haut parleur est placé à l'entrée  $x=0$  d'un tuyau sonore. Le rôle de ce dernier est uniquement de guider le son pour éviter que celui ne se répartisse dans tout l'espace. L'onde sonore émet un son de fréquence  $f = 500\text{Hz}$ . L'autre extrémité du tuyau sonore est fermée par une paroi mobile à la vitesse  $u$  (très faible de  $c$ ). A  $t=0$ , la paroi mobile est mise en mouvement, partant de  $x=D$ .

Un micro est mis en  $x_R = \frac{D}{2}$ , il perçoit un son de fréquence approximative  $f \simeq 500\text{Hz}$  modulé en amplitude (l'amplitude croît et décroît jusqu'à s'annuler dans le cas présent). La durée entre deux "silences" est  $\tau = 34\text{ms}$ .

La vitesse du son dans l'air sera prise de  $340\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

1. Quelle est la fréquence de l'onde réfléchi du fait du mouvement de l'extrémité? Quel autre phénomène ondulatoire associé à l'effet Doppler permet d'expliquer la modulation d'amplitude perçue? Déterminer la vitesse  $u$ .
2. On peut aussi interpréter les observations comme la conséquence d'ondes stationnaires lentement perturbées par le déplacement de l'extrémité du tuyau. De quelle distance se déplace l'extrémité mobile entre deux silences? Retrouver la valeur de  $u$ .

*Commentaire :*

*Cet exercice extrait d'un problème portant sur l'effet Doppler propose d'interpréter le phénomène soit comme un effet de battement (combiné à de l'effet Doppler) soit comme une phénomène d'onde stationnaire. Cet exercice est peu guidé ce qui le rend difficile. Remarque : un tuyau sonore dont l'extrémité est immobile est un système qui permet aussi de mesurer facilement la vitesse de l'onde sonore. Un système d'onde stationnaire se crée dans le tuyau et il est alors possible et facile avec un micro de mesurer la longueur d'onde. Connaissant la fréquence émise, il devient alors facile de calculer la célérité de l'onde sonore.  $c = \lambda \cdot f$ . Certains TP de concours exploitent ce type de manipulation.*