

Résolution numérique d'une équation différentielle

Présentation

Un skieur de masse $m=80\text{kg}$ glisse sur une pente faisant un angle $\alpha = 45^\circ$ avec l'horizontale. Il se lance sans vitesse initiale et subit de la part de l'air une force de frottement fluide de module $e.S.V^2$, où S désigne la section apparente du skieur ($S=0,4\text{m}^2$), V sa vitesse et e est un coefficient qui caractérise l'aérodynamisme de sa position ($e=0,4$).

1) Équation différentielle du mouvement

Trouver l'équation différentielle vérifiée par v .

Calculer la vitesse limite atteinte par le skieur. Commenter.

Cette équation est soluble analytiquement. Résoudre à la main cette équation différentielle.

Vérifier la solution à l'aide de Maple.
(Ecrire les instructions pour arriver au résultat.)

(rq : toutes les équations différentielles n'ont pas de solution analytique d'où l'intérêt de la résolution numérique)

2) Première résolution : l'algorithme d'Euler et tableur.

Principe de l'algorithme d'Euler.

Mise en pratique sous un tableur :

Créer un tableau avec :

en première colonne le temps t . On choisit comme « pas de temps » $dt=0,1s$ (Rentrer le pas de temps dans une case de manière à pouvoir le modifier au besoin...)

en deuxième colonne la vitesse à l'instant t .

en troisième colonne l'accélération à l'instant t .

en quatrième et dernière colonne la vitesse $v(t)=58,9.tanh(t/8,9)$ qui est la solution analytique de la solution

Tracer les courbes de $v(t)$.

Commenter l'allure. (Tenter par exemple une courbe de tendance exponentielle ...)

Imprimer le graphique.

Sur la courbe, mesurer un temps caractéristique du phénomène.

Changer maintenant le pas de temps : prendre $dt=0,5s$. Que constatez-vous ?

Changer encore le pas de temps : prendre $dt=2s$. Que constatez-vous ?

Commenter et conclure.

3) Seconde résolution : Ecriture de l'algorithme d'Euler avec Maple

Maple permet d'écrire des boucles.

Décrire (avec des mots français) la boucle « for ... » permettant d'obtenir la vitesse à tout instant :

Ecrire la boucle en langage Maple :