

Exercices d'électromagnétisme

★ ★ ★

PC

Philippe Ribière

Année Scolaire 2013-2014

Chapitre 1

Equations de Maxwell.

1.1 Bilan énergétique de la charge d'un condensateur.

Un condensateur est constitué de deux disques métallique de rayon a , distante de e . La première armature en $z = 0$ porte une charge $= q(t)$ et la seconde en $z = e$ porte une charge $-q(t)$. La capacité de ce condensateur est $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ (comme nous l'avons montré en électrostatique).

Initialement déchargé, ce condensateur est mis en série d'un générateur de Thévenin réel de f.e.m. e_0 et de résistance interne r .

On néglige les effets de bords (tout se passe comme si le condensateur était infini) et les champs électromagnétiques sont de la forme :

$$\vec{E} = E(t)\vec{u}_z \text{ pour } r < a \text{ et nul à l'extérieur}$$

$$\vec{B} = B(r, t)\vec{u}_\theta$$

1. En utilisant les lois de l'électrocinétique (valable dans l'approximation des régimes quasi stationnaires), étudier la tension $u_C(t)$ et montrer que l'énergie emmagasinée par le condensateur C est $E_C = \frac{1}{2} C e_0^2$.
2. En vous servant du fait que le champ électrique extérieur au condensateur est nul, montrer par le théorème de Gauss que le champ électrique $\vec{E} = E(t)\vec{u}_z = \frac{q(t)}{\pi\epsilon_0 a^2}\vec{u}_z$
3. Calculer par le théorème d'Ampère généralisé le champ magnétique $\vec{B} = B(r, t)\vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 r \dot{q}(t)}{2\pi\epsilon_0 a^2}\vec{u}_\theta$
4. En déduire le vecteur de Poynting et la puissance reçue par le champ électromagnétique. Quelle énergie est donc emmagasinée dans le condensateur lors de sa charge ?
5. Calculer la densité d'énergie électromagnétique. Faire alors le bilan d'énergie électromagnétique totale entre l'instant initial et $t \rightarrow \infty$.

Commentaire :

Un grand classique qui permet l'utilisation du théorème de Gauss et du théorème d'Ampère généralisé. Il montre que l'énergie stockée dans le condensateur l'est sous forme d'énergie électrique. Néanmoins l'utilisation des lois de l'électrocinétique repose sur l'approximation des régimes quasi stationnaires or l'exercice utilise le théorème d'ampère généralisé.

1.2 Emission isotrope de charges.

Un élément de matière de centre 0 et de rayon a émet α e- par unité de temps de manière isotrope à partir de l'instant $t = 0$. Ces électrons quittent la matière avec une vitesse v_0 . On néglige dans la suite les interactions électromagnétiques entre les particules chargées, si bien que les e- sont considérés comme isolés du point de vue mécanique.

1. Calculer la charge dq entre la sphère de rayon r et celle de rayon $r+dr$. En déduire que la charge volumique est :

$$\rho(r, t) = 0 \text{ pour } r > v_0 t \text{ et } \rho(r, t) = -\frac{\alpha e}{4\pi r^2 v_0} \text{ pour } r < v_0 t$$

et que la densité de courant électrique est

$$\vec{j}(r, t) = \vec{0} \text{ pour } r > v_0 t \text{ et } \vec{j}(r, t) = -\frac{\alpha e}{4\pi r^2} \vec{u}_r \text{ pour } r < v_0 t$$

2. Montrer alors le champ électrique dans tout l'espace est

$$\vec{E}(r, t) = \vec{0} \text{ pour } r > v_0 t \text{ et } \vec{E}(r, t) = \frac{\alpha e}{4\pi \epsilon r^2} \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{u}_r \text{ pour } r < v_0 t$$

Commenter sa forme. Montrer qu'il dérive d'un potentiel.

3. Montrer qu'un champ magnétique nul associé au champ électrique ci-dessus satisfait aux équations de Maxwell.
4. En déduire le vecteur de Poynting et la puissance transmise par le champ électromagnétique à travers une sphère de rayon r .
5. Calculer la densité d'énergie électromagnétique u_{em} .
6. Calculer la puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges.
7. Mettre en relation les deux grandeurs énergétiques précédentes. Commenter.

Commentaire :

Un extrait de concours. L'exercice ainsi posé donne beaucoup de résultats, en particulier la nécessité de distinguer $r < v_0 t$ et $r > v_0 t$. Le fait que le champ cède de l'énergie aux porteurs de charge est négligé dans l'exercice puisque les e- sont considérés comme des points matériels isolés.

Chapitre 2

Electromagnétisme dans l'ARQS, Induction.

2.1 Inductance propre et induction mutuelle de bobine.

2.1.1 Etude d'une unique bobine.

Dans cette première partie, on s'intéresse à une bobine de N spires, de longueur l , de rayon a , parcourue par un courant $i(t)$ lentement variable.

1. Rappeler le champ magnétique dans la bobine en négligeant les effets de bord.
2. Calculer le flux Φ de ce champ magnétique à travers la bobine. Montrer que ce flux est proportionnel à $i(t)$. Le coefficient de proportionnalité entre Φ et i est appelée L , coefficient d'autoinduction.
3. En déduire la fem induite dans la bobine par son propre champ magnétique.
4. Calculer l'énergie magnétique relative à l'existence du champ magnétique et comparer à l'énergie de la bobine.

2.1.2 Etude du couplage entre deux bobines.

Dans cette partie, on s'intéresse à deux bobines de N_1 et N_2 spires, de longueur l , de rayon a , parcourue par des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$. On suppose l'influence totale entre les bobines, ce qui signifie que toutes les lignes de champ magnétique d'une bobine traversent la seconde. (Ceci est possible grâce à un matériau qui canalise les lignes de champ).

1. Rappeler le champ magnétique total créé par les deux bobines en négligeant les effets de bord.
2. Calculer le flux Φ_1 de ce champ magnétique à travers la bobine. Montrer que ce flux est d'une part proportionnel à $i_1(t)$ et d'autre part à $i_2(t)$. Le coefficient de proportionnalité entre Φ et i_1 est appelée L , coefficient d'autoinduction et celui entre Φ et i_2 est appelé M , coefficient d'inductance mutuelle.
3. En déduire la fem induite dans la bobine 1.

2.1.3 Une application : le transformateur.

Dans cette partie, la bobine 1, d'inductance propre L_1 et de résistance interne R_1 est alimentée par un générateur de tension idéale $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$. Cette bobine est couplée à une seconde d'inductance propre L_2 et de résistance interne R_2 qui est elle fermée sur une résistance d'utilisation R_u . Le couplage entre les deux bobines est caractérisé par le coefficient d'inductance mutuelle M .

Calculer les courants dans chacune des deux bobines.

Commentaire :

D'après oraux. Cet exercice est un exercice de cours, sur la définition des inductances mutuelles et des inductances propres. Le calcul est simple dans la mesure où le champ magnétique d'un solénoïde est connu. La dernière partie sur le transformateur est un classique mais aucune connaissance n'est exigible dans le domaine. Les lignes de champs magnétiques sont canalisées par un milieu ferromagnétique doux qui est feuilleté pour éviter l'échauffement par courant de Foucault et mis sous forme d'un cadre qui traverse les deux bobines.

2.2 Influence d'une spire sur une autre spire.

Deux spires de même rayon a sont placées sur un axe z . La spire 1 fixe, située en $z=0$ est parcourue par un courant $i_1(t)$. La spire 2, située en $z = 10a$, est elle parcourue par un courant $i_2(t)$.

1. Calculer le champ magnétique créé par une spire un point M de son axe.
2. En déduire le flux magnétique du champ magnétique de la spire à travers elle même. En déduire le coefficient d'inductance propre L .
3. En déduire le flux magnétique du champ magnétique de la spire 1 à travers la spire 2. En déduire le coefficient d'inductance mutuelle M .

Commentaire :

D'après oral CCP. Cet exercice est un exercice de cours, sur la définition des inductances mutuelles et des inductances propres. Le calcul est lié au calcul du champ magnétique créé par une spire qui doit être parfaitement maîtrisé.

2.3 Pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique est constituée d'un tore de section carrée de côté $a=5\text{cm}$, de rayon intérieur a , et donc de rayon extérieur $2a$, avec $N=10000$ spires. Ce circuit est de résistance $R=0,2\Omega$ et est mis en parallèle d'un ampèremètre de résistance interne $r_i=0,3\Omega$.

Cette pince sert à mesurer "sans contact" l'intensité i circulant dans un fil infinie, parcourue par un courant $I = I_M \cos(\omega t)$ de fréquence $f=50\text{Hz}$. On note $i(t) = i_M \cos(\omega t)$ le courant dans le tore (la pince ampèremétrique).

1. Justifier que le champ magnétique total $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{u}_\theta$. Calculer le en tout point M à l'intérieur du tore.
2. Calculer le flux Φ à travers les N spires.

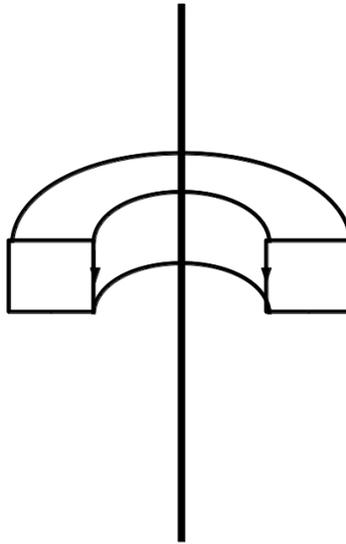


FIGURE 2.1 – La pince ampèremétrique.

3. En déduire le rapport $\frac{i_M}{I_M}$.

Commentaire :

D'après oral CCP. Cet exercice est un exercice très classique et dont l'application est importante. Ici le calcul du champ magnétique est à faire par le théorème d'ampère et le champ magnétique dans un système torique est identique à celui d'un solénoïde infini.

2.4 Freinage électromagnétique : le rail de Laplace

On considère le dispositif expérimental des rails de Laplace. Un rail métallique de résistance interne négligeable roule sans glisser sur un circuit électrique fermé par une résistance R (non présentée sur la photo). Ce rail de longueur utile l , est lancé avec une vitesse $v_0 \vec{u}_x$ selon la direction des deux fils parallèles du circuit. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire dirigé selon la verticale ascendante $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

1. Expliquer qualitativement la nature des phénomènes mis en jeu et l'évolution a priori du mouvement de la barre.
2. Calculer la force électromotrice induite dans la barre.
3. Etudier le schéma électrique équivalent au circuit en précisant avec soin la convention.
4. Calculer les forces de Laplace dans la barre.
5. Etudier l'évolution mécanique de la barre.

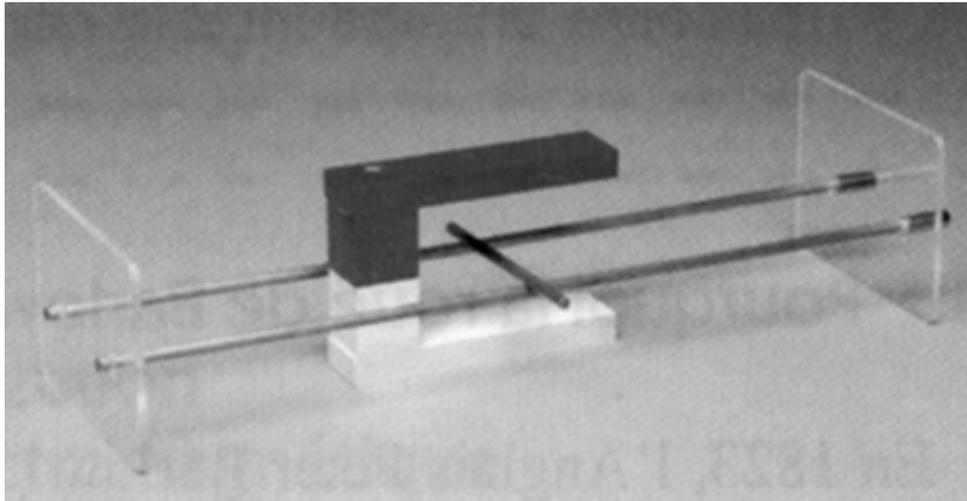


FIGURE 2.2 – Le dispositif des rails de Laplace.

6. En déduire l'équation différentielle régissant la vitesse de la barre. Conclure et commenter.

Commentaire :

D'après oraux. Ainsi posé, cet exercice est un exercice de cours. La première question, bien rarement posée, à un intérêt fort. Une fois l'enchaînement des idées physiques compris, la logique de l'exercice est claire, et comme la loi de Lenz permet de présenter le comportement, cette analyse peut être et doit être proposée spontanément. La démarche est ensuite classique : établir la fem induite et donc en déduire le schéma électrique équivalent ; établir les forces de Laplace et l'équation mécanique. Regrouper ces deux équations pour étudier la grandeur souhaitée par l'énoncé. Il est à noter que cet exercice se décline aux concours sous de multiples formes : le circuit est fermé par un condensateur et/ou une bobine et/ou un générateur... Ici l'aspect freinage du rail est aussi intéressant puisque l'induction permet de freiner les camions, les TGV et les vélos d'appartement.

2.5 Rail de Laplace alimenté.

On considère le dispositif expérimental des rails de Laplace. Un rail métallique de résistance interne R roule sans glisser sur un circuit électrique fermé par une résistance R , identique à la résistance de la barre, et un générateur de tension délivrant une fem constante E . Le rail de longueur utile l , est immobile initialement. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire dirigé selon la verticale ascendante $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

1. Expliquer pourquoi le rail se met en mouvement et quel peut être son mouvement ultérieur.
2. Trouver l'équation mécanique de la barre.
3. Trouver l'équation électrique de la barre.
4. En déduire l'équation différentielle régissant la vitesse de la barre. Conclure et commenter.

Commentaire :

D'après oral CCP. un exercice très proche du cours, sans difficulté.

2.6 Deux rails de Laplace

Le dispositif expérimental est constitué de deux rails de Laplace. Chaque rail métallique de longueur utile l et de résistance interne R roule sans glisser sur un circuit électrique fermé par une résistance R , identique à la résistance de la barre. Le rail 1, initialement en $x_1(0) = l$ est immobile initialement alors que le rail 2, initialement en $x_2(0) = 2l$, est lancé avec une vitesse $v_0\vec{u}_x$. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire dirigé selon la verticale ascendante $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$. On constate expérimentalement que les deux rails se mettent en mouvement.

1. Calculer la fem induite dans chaque barre.
2. Dessiner alors le circuit électrique équivalent au circuit avec soin.
3. En déduire l'équation électrique du circuit.
4. Etablir les forces de Laplace dans chaque barre
5. Trouver l'équation mécanique de chaque barre.
6. Etudier le mouvement de chacune des barres à l'aide de $S(t) = x_1(t) + x_2(t)$ et de $D(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Commenter.
7. Faire une étude énergétique du mouvement.

Commentaire :

D'après oral Mines. un exercice proche du cours, sans grande difficulté mais qui repose sur le dessin propre du circuit électrique équivalent. Comme le système comprend plusieurs mailles, l'étude est plus longue mais reste calculatoirement facile. La fin de l'exercice est guidée pour parvenir à résoudre les deux équations différentielles couplées.

2.7 Rail de Laplace dans un champ magnétique non uniforme.

On considère le dispositif expérimental des rails de Laplace. Un rail métallique de résistance interne négligeable roule sans glisser sur un circuit électrique fermé par une résistance R et une capacité C . Ce rail de longueur utile l , est lancé avec une vitesse $v_0\vec{u}_x$ selon la direction des deux fils parallèles du circuit. L'ensemble est placé dans un champ magnétique créé par un fil infini, situé à une distance l en dessous des rails de Laplace, parcouru par un courant I_0 , stationnaire.

1. Calculer le champ magnétique créé par le fil infini.
2. Calculer la force électromotrice induite dans la barre mobile.
3. Etudier le schéma électrique équivalent au circuit en précisant avec soin la convention.
4. Calculer les forces de Laplace dans la barre.
5. Etudier l'évolution mécanique de la barre.
6. En déduire l'équation différentielle régissant la vitesse de la barre. Conclure et commenter.

Commentaire :

D'après oral Mines. un exercice de plus sur les rails de Laplace. Celui diffère un peu dans la mesure où le champ magnétique est bien stationnaire mais non uniforme. Tous les points de la barre ne sont pas soumis au même champ. Il est à noter que cela pourrait faire pivoter la barre mais cela n'est pas pris en compte dans cette exercice. Enfin la présence du condensateur complique un peu le calcul.

2.8 Chute d'une spire au dessus d'une autre spire.

Deux spires de même rayon a sont placées sur un axe z . La spire 1 fixe, située en $z=0$ est parcourue par un courant i_1 . La spire 2, qui se translate librement sur l'axe Oz , est initialement située en $z = 100.a$. Elle est de masse m , de résistance R et on néglige son auto inductance L . Cette spire 2 tombe sous l'effet de son poids.

1. Que se passe-t-il qualitativement ?
2. Calculer le champ magnétique créé par la première spire en un point M de coordonnée z de l'axe.
3. Calculer la fem induite dans la spire 2.
4. Calculer le courant dans la spire 2 (le courant est orienté par l'axe Oz) ? Quelle serait la direction du champ magnétique 2 créée par cette spire ? Commenter ? Pourquoi le néglige-t-on ?
5. Quelle est la force de Laplace sur la spire 2 ? Quel est le problème rencontré ?
6. En utilisant le fait que le flux du champ magnétique sur une surface fermée est nulle, en considérant une surface cylindrique de rayon r et de hauteur dz , montrer que

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

En déduire B_r

7. Calculer alors la force de Laplace sur la spire 2 en tenant compte de la composante du champ magnétique calculée ci dessus.
8. Trouver alors l'équation différentielle de z . Commenter. La lévitation magnétique est elle possible ?

Commentaire :

D'après oral X, Mines. Cet exercice est plus difficile dans la mesure où il n'est pas possible de se contenter du champ magnétique créé par la spire sur l'axe, il faut donc avoir (indirectement, sous forme intégrale) recours à la $\text{div}\vec{B}=0$. Néanmoins, la démarche de l'exercice est toujours la même, équation électrique, équation mécanique et l'interprétation avec la loi de Lenz riche en physique.

2.9 La Roue de Barlow

Une roue de Barlow est modélisée comme un disque métallique homogène de centre O et de rayon a , de moment d'inertie J par rapport à son axe Oz horizontal autour duquel il peut tourner sans

frottement. Cette roue, équivalente à un dipôle, entre dans un circuit électrique fermé. Les bornes de ce dipôle étant le centre O et un point de la périphérie I. La totalité de la surface du disque est placée dans un champ magnétique uniforme et constant parallèle à l'axe Oz. On négligera tout phénomène d'auto-induction et le reste du circuit fermé est une résistance R.

1. Déterminer la fem induite sur la portion OI du circuit lorsque la roue tourne à la vitesse angulaire instantanée ω (par la circulation du champ électromoteur sur un arc OI).
2. Déterminer alors le courant dans le circuit (équation électrique).
3. Déterminer la force de Laplace élémentaire exercée sur un élément de circuit pris dans le disque, son moment par rapport à l'axe et le moment total des forces de Laplace sur tout le disque. En déduire l'équation mécanique du mouvement du disque.
4. Déterminer alors le mouvement du disque lorsque les conditions initiales sont les suivantes : à $t = 0$ la roue est lancée à la vitesse angulaire ω_0 . Faire un bilan énergétique.
5. Un opérateur exerce maintenant un couple Γ constant sur la roue. Établir la nouvelle équation mécanique. Chercher la solution en régime permanent et faire un bilan énergétique : où passe la puissance fournie par l'opérateur ?

Commentaire :

D'après oral et écrit centrale, CCP. Cet exercice est un exercice classique. Dans cette version, la résolution est guidée vers une solution simple qui évite ainsi une partie du problème.

2.10 Mise en rotation d'une spire.

On considère le dispositif représenté figure 4.3. Une grande spire 1 circulaire de rayon a et de centre O est alimentée via une résistance R et un interrupteur K par un générateur de tension parfait E. Une seconde spire de rayon $b \ll a$ et de centre O, de résistance R, est placée sur un axe de rotation Oz et son moment d'inertie sur cet axe est J. Les inductances propres sont négligeables. L'ensemble de ces deux spires est placé dans un champ magnétique extérieur $B_e \vec{u}_y$.

Lors d'une première phase du mouvement très brève, l'interrupteur K est fermé et le courant i_1 dans la spire 1 passe donc de 0 à sa valeur en régime permanent. Pendant cette phase, la spire 2 ne bouge pas (du fait de son inertie) mais acquiert une vitesse angulaire ω_0 . Cette phase est appelée "percuSSION". Dans une seconde phase, la spire 2 tourne sur elle-même, à partir de la vitesse angulaire ω_0 .

1. Interpréter qualitativement chacune des deux phases du mouvement.
2. Etude de la phase 1 : induction dans un champ non stationnaire et un circuit fixe.
 - (a) Calculer la valeur du courant i_1 en régime permanent.
 - (b) Calculer le courant induit dans la petite spire 2.
 - (c) En assimilant la petite spire à un dipôle magnétique \vec{M}_2 , et sachant qu'elle est soumise à un couple $\vec{\Gamma} = \vec{M}_2 \wedge \vec{B}_{tot}$, calculer ω_0 en intégrant le théorème du moment cinétique sur l'ensemble de la phase 1.
3. Etude de la phase 2 : induction dans un champ stationnaire et un circuit mobile.

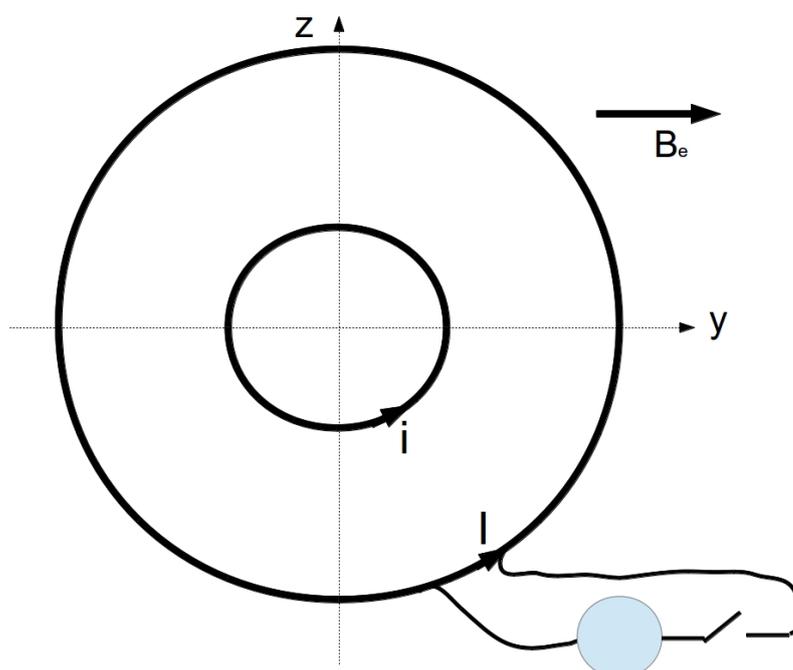


FIGURE 2.3 – Percussion magnétique pour la mise en rotation d'une spire.

- Calculer le courant induit dans la petite spire 2.
- Trouver l'équation différentielle vérifiée par $\omega(t)$.

Commentaire :

D'après oral Mines. Cet exercice est un exercice qui permet la révision de l'ensemble des phénomènes d'induction puisqu'il fait étudier les deux situations de cours. Un exercice riche. Les résultats sur le dipôle magnétiques sont rappelés mais il faut les connaître. Par ailleurs cet exercice peut faire penser à des situations rencontrées dans le cas des moteurs à induction, ce qui le rend intéressant ; il faudrait que le champ magnétique extérieur soit un champ tournant pour qu'il entraîne la spire.

2.11 Le haut parleur.

Un haut parleur permet la conversion d'une information électrique en onde sonore : il s'agit donc d'un système électromécanique, représenté figure 4.4. L'aimant en E, ici horizontal et vu en coupe, est source d'un champ magnétique radial, connu uniquement dans l'entrefer, $\vec{B} = B_r \vec{u}_r$. Une bobine de N spires, de rayon a, de résistance interne R et d'inductance propre L est enroulée sur une membrane mobile. La bobine est alimenté par un générateur de tension idéal de fem $e_G(t)$. L'ensemble membrane et bobine est de masse m et est maintenu dans une position d'équilibre par une suspension que l'on modélisera par une force de rappel élastique de raideur k. Enfin l'interaction de la membrane avec l'air afin de créer l'onde sonore est modélisée par une force de frottement fluide $-f\vec{v}$.

- Calculer le champ électromoteur \vec{E}_m puis la force électromotrice induite dans la bobine du fait de son mouvement dans le champ magnétique de l'aimant.

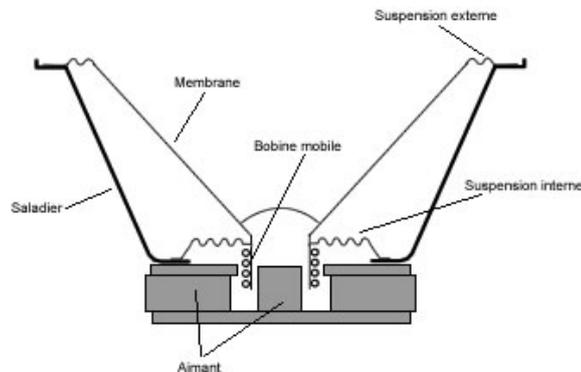


FIGURE 2.4 – Schéma en coupe du Haut Parleur.

2. Etudier le schéma électrique équivalent au circuit en précisant avec soin la convention.
3. Calculer les forces de Laplace sur la bobine.
4. Etudier l'évolution mécanique de l'ensemble membrane bobine.
5. Justifier qu'il est judicieux de supposer $e_G(t)$ de la forme $e_0 \cos(\omega t)$
6. Passer les deux équations suivantes aux complexes. On notera ω_0 la pulsation propre mécanique et Q le facteur de qualité mécanique.
7. Calculer alors l'impédance du haut parleur $\underline{Z}_{HP} = \frac{e_G}{i} = \frac{e_0}{i_0}$
8. Calculer la vitesse \underline{v}_0 de la membrane en fonction de e_0
9. Interpréter \underline{Z}_{HP} et \underline{v}_0 pour $\omega \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$ et $\omega = \omega_0$. Quelle situation est la plus favorable à la restitution d'un son ?
10. Faire un bilan de puissance du haut parleur. Que dire du couplage électromécanique ?
11. Faire le bilan de puissance moyenne du haut parleur. Définir alors le rendement du haut parleur ? Sur quelles paramètres jouer pour le maximiser ?

Commentaire :

D'après écrits centrale et CCP. Ce problème est un problème de cours. Le calcul de la fem induite est guidée ce qui évite d'utiliser ici la loi de Lenz. L'obtention des équations électriques et mécaniques est très classique, tout comme le passage au complexe. La caractérisation et l'interprétation du comportement électrique et mécanique global est calculatoire mais sans difficulté et les conclusions sont riches. Enfin le bilan de puissance est un point de passage obligé. La méthode d'obtention à partir

des équations mécaniques et électriques soit être maîtrisée. L'interprétation est elle aisée. Il faut se rappeler que $\langle \frac{df}{dt} \rangle_T = 0$ en régime sinusoïdal forcé. Le rendement est défini comme toujours par la grandeur utile (le son émis ici) divisée par la grandeur coûteuse (ici la puissance du générateur).

2.12 L'effet de peau : électromagnétisme dans les métaux.

On s'intéresse à un conducteur pour lequel la loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

1. Etude de la densité volumique de charge ρ du conducteur.

Montrer à partir de l'équation de conservation de la charge que ρ est solution de l'équation :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Sachant que $\sigma \simeq 10^8 \text{ S.m}^{-1}$, calculer un ordre de grandeur des variations temporelles de ρ . Sachant que l'on s'intéresse à des fréquences $< 10^{16} \text{ Hz}$, justifier que l'on peut considérer $\rho = 0$. Ce résultat est général : un conducteur est localement neutre.

2. Montrer dans l'équation de Maxwell $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ que le terme $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant le terme $\mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$.

Les équations de Maxwell sont alors les mêmes que dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires.

3. Montrer à partir des équations de Maxwell dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires que l'équation de propagation est

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4. Cette équation est une équation de diffusion. Donner alors la dimension du coefficient D et une première estimation de l'épaisseur de peau.

5. On suppose alors que le métal occupe tout le demi espace $z > 0$, l'espace $z < 0$ étant occupé par l'air assimilé à du vide. La solution cherchée est de la forme $\vec{E} = E(z, t) \vec{u}_x$

Montrer que la relation de dispersion est la suivante

$$k^2 = -j \mu_0 \sigma \omega$$

6. En utilisant le fait que $-j = \frac{(1-j)^2}{2}$, trouver l'expression de $k(\omega) = k'(\omega) + j k''(\omega)$. En déduire la forme de \vec{E} et conclure quant à l'épaisseur de peau.

7. Calculer le champ magnétique résultant.

Chapitre 3

Onde électromagnétique dans le vide.

3.1 Equation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

1. Rappeler les équations de Maxwell.
2. Simplifier ces équations dans le cas du vide.
3. Montrer alors que l'équation de propagation de \vec{E} dans le vide est :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

4. Etudier la structure des OPPH dans le vide, en revenant aux équations découplées du premier ordre.
 - (a) Montrer tout d'abord que la relation de dispersion est

$$k = \pm \frac{\omega}{c}$$

- (b) Montrer que l'onde est transversale.
- (c) Montrer que $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre orthonormé direct.
- (d) Montrer que les champs électriques et magnétiques associés à une OPPH sont en phase et dans un rapport $1/c$.
- (e) Ces résultats sont-ils généralisables à une OPP ?

Commentaire :

Extrait de concours (première partie d'un problème). Il s'agit d'un exercice de cours, qui suit la logique du cours : passage aux équations découplées du second ordre puis retour aux équations couplées du premier ordre pour retrouver l'information complète sur le champ. Il faut cependant dans cet énoncé prendre l'initiative à la question 4 de passer en complexe, puisqu'il est question d'OPPH mais compte tenu de la question 4.1, cela ne doit pas poser de problème.

3.2 Equation de propagation unidimensionnelle des ondes électromagnétiques dans le vide.

1. Rappeler les équations de Maxwell dans le cas du vide. On cherche des solutions de ces équations dans le cas d'un champ électromagnétique dans le vide se propageant dans la direction \vec{u}_x , polarisée rectilignement suivant \vec{u}_y , donc de la forme $\vec{E}(x, t) = E_y(x, t)\vec{u}_y$ et $\vec{B}(x, t)$.
2. Simplifier les équations de Maxwell dans le cas ci dessus.
3. Montrer que l'onde est transversale.
4. Montrer l'équation de propagation de \vec{E} dans le vide est :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

Commenter.

5. La solution de cette équation peut s'écrire $\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$ Quelle non donne-t-on à ce type de solution ?
Dans la suite de l'énoncé, il est demandé de rester avec des notions réelles.
6. Montrer alors que la relation de dispersion est

$$k = \frac{\omega}{c}$$

7. Calculer le champ magnétique correspondant.
8. Calculer alors le vecteur de Pointing $\vec{\Pi}$.
9. Calculer l'énergie électromagnétique volumique u_{em} de l'onde. Etablir le lien entre les deux grandeurs énergétiques. Ecrire l'équation locale de conservation de l'énergie et commenter.

Commentaire :

Extrait de concours. Cet exercice est très proche du cours mais il fait retrouver l'équation de propagation dans le cas unidimensionnel, donc sans avoir recours aux formules d'analyse vectorielle, juste l'expression de l'opérateur divergence et rotationnel en cartésien. L'énoncé par ailleurs impose une résolution sans les complexes, car il souhaite étudier des grandeurs énergétiques. Il faut respecter l'énoncé.

3.3 Etude des ondes électromagnétiques plane progressive harmonique dans le vide.

1. Rappeler les équations de Maxwell dans le cas du vide.
2. On s'intéresse à des solutions de type onde plane progressive harmonique de l'équation de propagation en supposant l'onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement suivant \vec{u}_y : $\vec{E} = E_0 \exp j(\omega t - kx)\vec{u}_y$ et $\vec{B} = B_0 \exp j(\omega t - kx)\vec{u}_z$.

- (a) Traduire les 4 équations précédentes à l'aide de la notation complexe.
- (b) Vérifier que l'onde est transversale.
- (c) Trouver la relation de dispersion est

$$k = \frac{\omega}{c}$$

- (d) Justifier que B_0 est réel et calculer sa valeur en fonction de E_0

3. Etude énergétique :

- (a) Calculer la valeur moyenne temporelle de l'énergie électromagnétique volumique $\langle u_{em} \rangle$ de l'onde.
- (b) Calculer alors la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{\Pi} \rangle$.
- (c) Quelle est la puissance cédée aux porteurs de charges ?

Commentaire :

Extrait de concours. Il s'agit encore une fois d'une approche un peu différente de celle du cours mais déjà rencontré en exercice dans la partie onde sonore. L'énoncé exploite très tôt le fait que les OPPH soient solutions de l'équation et passe donc très tôt aux notations complexes (avant même de savoir que l'équation est celle de d'Alembert.) Ceci évite toute l'analyse vectorielle. C'est une approche privilégiée par certains énoncés. Il ne faut pas être surpris. Attention pour l'étude énergétique (grandeur quadratique), il faut absolument revenir aux grandeurs réelles.

3.4 Réflexion d'une onde électromagnétique sur un miroir parfait sous incidence normale.

Une onde électromagnétique se propage suivant \vec{u}_x tout en étant polarisée suivant \vec{u}_y . L'espace est vide et infini selon $x < 0$ et est limité par un miroir, conducteur parfait en $x=0$. On admet que l'onde électromagnétique est nulle dans le conducteur parfait.

1. Rappeler sans démonstration l'équation de propagation du champ électrique.
2. Rappeler la solution sous forme d'une onde plane progressive harmonique (champ électrique et champ magnétique).
Sur le conducteur parfait, l'onde se réfléchit.
3. Ecrire les relations de passage à l'interface avec le conducteur parfait pour le champ électrique total et le champ magnétique total.
4. En déduire l'expression de l'onde (champ électrique et champ magnétique) réfléchi. Commenter sa structure.
5. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ ainsi que sa moyenne temporelle.
6. Calculer l'énergie électromagnétique volumique u_{em} de l'onde ainsi que sa moyenne temporelle. Commenter.

Commentaire :

Extrait de concours, thème fréquemment abordé aux écrits et aux oraux, incontournable. Il s'agit de l'étude d'une onde stationnaire générée par la superposition de deux ondes planes de même amplitude se propageant en sens inverse. Les seuls résultats exigibles portent sur l'onde plane progressive harmonique.

3.5 Onde stationnaire aux abords d'un miroir.

Un miroir est composé d'une fine pellicule d'argent qui réfléchit la lumière. L'argent est un excellent conducteur, sa conductivité σ est très élevée.

1. Justifier qualitativement que si la conductivité est grande, alors le champ électrique dans le conducteur est faible.
Le champ électrique est pris nul dans le métal dans la suite du problème.
2. Rappeler sans démonstration l'équation de propagation du champ électrique.
3. On cherche des solutions à cette équation de la forme :

$$\vec{E} = E_0 \sin(\omega t) \sin(k \cdot x) \vec{u}_y$$

Montrer que ce champ respecte les CL imposées sur le miroir plan placée en $x = 0$

4. Trouver la relation entre ω et k .
5. Etablir l'expression du champ magnétique associé.
6. Calculer le vecteur de Pointing $\vec{\Pi}$.
7. Calculer l'énergie électromagnétique volumique u_{em} de l'onde. Commenter.

Commentaire :

Extrait de concours CCP. Cet exercice est le jumeau du précédent mais au lieu de partir de l'OPPH incidente et de calculer l'OPPH réfléchi pour enfin les superposer, cet exercice privilégie une autre approche : il propose dès le départ une onde stationnaire. Il ne faut donc pas utiliser les résultats du cours sur l'OPPH ni la notation complexe mais revenir aux équations générales et faire les calculs de dérivation.

3.6 Modélisation simplifiée d'une cavité optique .

Le but de cette exercice est d'étudier les modes d'une cavité, comme par exemple celle d'une cavité Laser. L'onde électromagnétique se propage suivant $\pm \vec{u}_x$ tout en étant polarisée suivant \vec{u}_y et effectue des allers-retours dans la cavité, assimilé à du vide, délimitée par deux miroirs plans (ce qui simplifie la situation réelle du laser où les miroirs sont sphériques), assimilés à des conducteurs parfaits placés en $x=0$ et $x=L$.

1. Rappeler (sans démonstration) l'équation de propagation de d'Alembert unidimensionnelle dont est solution le champ électrique.

2. Ecrire les relations de passage à l'interface avec le conducteur parfait.
En déduire que le champ électrique total en $x = 0$ et $x = L$.
3. Sur le conducteur parfait, l'onde se réfléchit et effectue donc plusieurs allers-retours dans la cavité. On cherche alors la solution du champ électrique sous forme d'une onde stationnaire :
 $\vec{E}_{tot} = E_0 \sin(\omega t) \cos(k \cdot x + \psi) \vec{u}_y$
4. Trouver la relation liant ω et k .
5. Compte tenu des conditions aux limites, calculer ψ et les valeurs possibles de k .
6. Quelles sont donc les fréquences propres de la cavité, i.e. les fréquences permettant l'existence d'une onde électromagnétique dans la cavité.
7. Dans le cas $n = 1$, calculer le champ magnétique correspondant.
8. Réinterpréter \vec{E}_{tot} en terme d'ondes planes progressives.
9. Calculer le vecteur de Pointing $\vec{\Pi}$.
10. Calculer l'énergie électromagnétique volumique u_{em} de l'onde. Commenter.

Commentaire :

D'après oral CCP et écrit CPP central. Un exercice très classique : l'étude des ondes stationnaires dans la cavité, avec le retour sur l'interprétation en terme d'onde plane. Il faut faire le lien avec diverses situations déjà rencontrées : la corde vibrante puisque les CL imposent la quantification du vecteur d'onde, mais aussi une cavité Fabry Parrot prise sous incidence normale. Enfin il faut aussi rapprocher cet exercice de celui sur les guides d'ondes. En un mot un exercice riche à retravailler pour les écrits et les oraux.

3.7 Propagation de la lumière dans le vide et réflexion de la lumière sous incidence oblique.

La lumière se propage en faisant un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ avec \vec{u}_x et \vec{u}_z , tout en étant polarisée suivant \vec{u}_y . L'espace est vide infini selon $x < 0$ et est limité par un miroir, conducteur parfait en $x=0$.

1. Ecrire l'onde incidente (champ électrique et champ magnétique) sous forme d'une onde plane progressive harmonique.
2. Rappeler la relation de dispersion, i.e. le lien entre ω et k .
Sur le conducteur parfait, l'onde se réfléchit.
3. Ecrire les relations de passage à l'interface avec le conducteur parfait.
4. Quelle est la direction de l'onde réfléchi ?
5. En déduire l'onde réfléchi.
6. Calculer le champ électrique total. \vec{E}_{tot} . Commenter sa structure.
7. Calculer le vecteur de Pointing $\vec{\Pi}$.
8. Calculer l'énergie électromagnétique volumique u_{em} de l'onde.

Commentaire :

D'après oral central. Un exercice original. La première question doit être traitée avec soin afin d'avoir la bonne forme : calculer le module de k et sa direction pour enfin calculer $\vec{k} \cdot \vec{r} = \frac{\omega}{c\sqrt{2}}(x+z)$. Pour trouver la direction de l'onde réfléchie, pensez aux lois de Snell Descartes. Au final, la structure de l'onde est progressive suivant z et stationnaire suivant x , structure analogue à celle d'un guide d'onde.

3.8 Réflexion de la lumière sur un métal réel.

Considérons une onde électromagnétique provenant de $x = -\infty$ de la forme $\vec{E} = \underline{E}_0 \exp j(\omega t - \frac{\omega}{c}x)\vec{u}_z$ et arrivant en $x=0$ sur un métal de conductivité σ (non considéré comme infini).

Cette onde incidente donne naissance à :

- une onde réfléchie (se propageant selon $-\vec{u}_x$ dans l'espace $x < 0$) de la forme $\vec{E} = \underline{r} \cdot \underline{E}_0 \exp j(\omega t - \frac{\omega}{c}x)\vec{u}_z$
- et une onde transmise (se propageant selon $+\vec{u}_x$ dans l'espace $x > 0$) de la forme $\vec{E} = \underline{tr} \cdot \underline{E}_0 \exp j(\omega t - k_m x)\vec{u}_z$ avec $k_m = \frac{(1-j)}{\delta}$ ($\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$ est l'épaisseur de peau que nous étudierons dans un chapitre ultérieur).

1. Justifier de manière satisfaisante que l'onde électromagnétique ne pénètre pas les métaux de conductivité très grande.
2. Déterminer les champs magnétiques complexes associées à chaque onde.
3. Comme le modèle adoptée ici est réaliste (métal réel), il n'y pas de champ surfacique : ni charge surfacique ni courant surfacique. Traduire les relations de passage des champs.
4. En déduire l'expression de \underline{r} et \underline{tr} .
5. On note $\alpha = \frac{\delta}{\lambda} \ll 1$ supposé infiniment petit. Montrer que $\underline{tr} \simeq \alpha(1+j)$.
6. Calculer la puissance incidente sur une surface S du conducteur.
7. Montrer que la puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges est $\langle dP \rangle = \sigma \alpha^2 E_0^2 \exp(-2x/\delta) S dx$.
8. En déduire la puissance moyenne dissipée dans le conducteur de surface S en $x=0$.

Commentaire :

D'après oral central. Un exercice original. Il montre la situation réelle et permet sans conteste de mieux comprendre les cas idéaux. Ici le problème a recours aux pseudo OPPH pour l'étude puisque le vecteur d'onde dans le métal est complexe. Un très bel exercice, de bon niveau.

3.9 Le guide d'onde : dispersion dues aux conditions aux limites.

Le guide d'onde de longueur infinie est de section rectangulaire $a.b : 0 < x < a$ et $0 < y < b$. Il est fait de métal assimilé à un conducteur parfait On admet alors que le champ électrique et magnétique

à l'intérieur du métal est nul. L'intérieur du guide d'onde est remplie d'air assimilé à du vide.

1. A partir des équations de passages des champs, justifier que la composante tangentielle au métal du champ électrique est nulle $\vec{E}_t = \vec{0}$ et que la composante normale au métal du champ magnétique est nulle $\vec{B}_n = \vec{0}$
2. Dans la suite, on cherche des solutions de la forme $\vec{E} = A(x, y) \exp(j\omega t - jk_g z) \vec{u}_y$.
Montrer que A ne dépend pas de y.
Montrer que l'équation dont A est solution est

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right) A = 0$$

Compte tenu des Conditions aux limites, montrer que $\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 > 0$. Montrer alors que

$$\vec{E}_n = A_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp(j\omega t - jk_{g,n} z) \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad k_{g,n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

Commenter l'expression du champ, à x fixé d'une part et à z fixé d'autre part.

3. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
4. Calculer le champ magnétique \vec{B}_n en justifiant la nécessité de revenir aux équations de Maxwell pour ce calcul. Vérifier que la forme proposée vérifie les conditions aux limites.
5. Calculer la puissance moyenne temporelle du vecteur Poynting et montrer que

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{A_{0,n}^2 k_{g,n}}{2\mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{u}_z$$

Commenter cette expression En déduire que

$$\langle P \rangle = \frac{A_{0,n}^2 k_{g,n} a \cdot b}{4\mu_0 \omega}$$

Commenter.

6. Montrer que l'énergie électromagnétique moyenne par unité de longueur du guide est

$$\left\langle \frac{dU_{em}}{dz} \right\rangle = \frac{\epsilon_0 A_{0,n}^2 ab}{4}$$

7. Déduire des deux expressions ci avant la vitesse de propagation de l'énergie v_e
8. Réinterpréter l'expression de \vec{E}_n comme une superposition de deux OPPH.

$$\vec{E}_n = -\frac{jA_{0,n}}{2} \exp(j\omega t - jk_{g,n} z - j\frac{n\pi}{a} x) \vec{u}_y + \frac{jA_{0,n}}{2} \exp(j\omega t - jk_{g,n} z + j\frac{n\pi}{a} x) \vec{u}_y$$

Réinterpréter alors la forme de \vec{B}_n

Commentaire :

D'après oral CCP et écrit CPP central Mines. Un exercice incontournable, qui fait parti du cours. Le guide d'onde est utilisé de manière courante dans les radars pour guider l'onde électromagnétique de l'émetteur à l'antenne. Par certains aspects, la fibre optique peut être associée à un guide d'onde. Il s'agit donc d'un problème industriel d'envergure et qui constitue un sujet de prédilection des concours.

3.10 Modèle du dipôle rayonnant.

1. Rappeler les trois tailles caractéristiques du rayonnement du dipôle dans la zone de rayonnement.
2. Commenter l'expression du champ électromagnétique rayonné par le dipôle :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \vec{u}_\varphi$$

3. Pour $\vec{P} = P_0 \cos(\omega p t) \vec{u}_z$, calculer le champ électromagnétique.
4. Calculer le vecteur de Pointing de cette onde. Commenter l'allure son indicatrice de rayonnement 2.1 (graphique représentant dans la direction (θ, φ) le module du vecteur de Poynting moyen.)
5. Calculer la puissance rayonnée à travers une sphère de rayon r. Commenter.

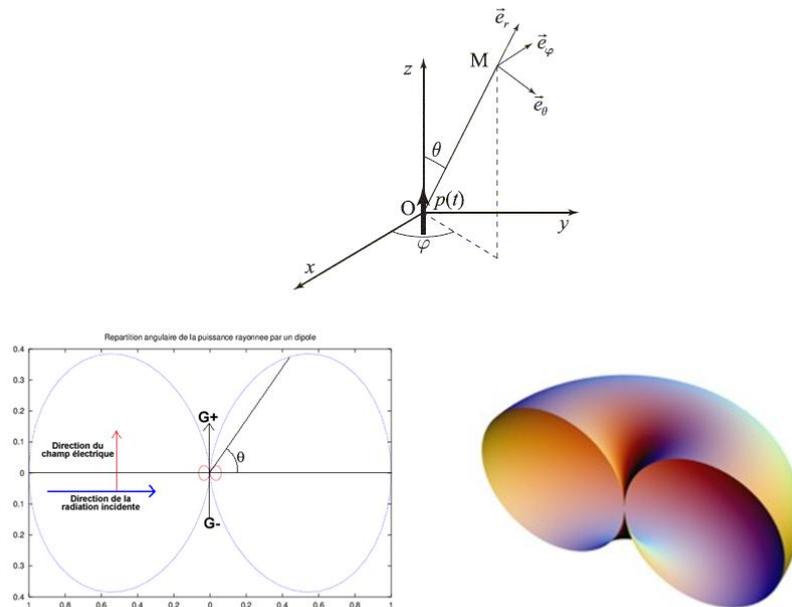


FIGURE 3.1 – Indicatrice de rayonnement du dipôle oscillant.

Commentaire :

D'après oral CCP. Une question de cours, qui reprend les éléments essentiels mais qui malheureusement ne les exploite pas dans un cas concret. Le tracé de l'indicatrice de rayonnement est cependant

hors programme et malgré l'indication, la question est un peu difficile : retrouver sur ce graphique l'invariance par rotation d'angle φ , retrouver aussi le fait que le dipôle rayonne un maximum dans son plan équatorial et rien sur son axe. Ce graphique est donc un outil, une fois maîtrisé, pour visualiser rapidement toutes ces informations. Enfin la dernière question permet de montrer que la décroissance en $1/r$ des champs n'est pas lié à un quelconque phénomène d'absorption (dans le vide !) mais s'implément à la répartition du champ électromagnétique sur des surfaces sphériques de plus en plus grande.

3.11 Modèle d'antenne.

Il est possible à partir du modèle du dipôle oscillant de comprendre l'onde générée par des antennes d'extension a , avec a non nécessairement petit devant λ la longueur d'onde (ce qui était l'élément le plus restrictif du modèle du dipôle oscillant.)

On considère donc une antenne constituée de deux dipôles situés de part et d'autre, à une distance a , du point origine 0 , et donc de moment dipolaire total

$$\vec{P}_{tot} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = P_0 \cos(\omega t - \omega a/c) \vec{u}_z + P_0 \cos(\omega t + \omega a/c) \vec{u}_z$$

On admet que le champ électrique rayonné en M (avec $r \gg \lambda$, zone de rayonnement) est de la forme :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} (\ddot{p}_1(t - \frac{r_1}{c}) + \ddot{p}_2(t - \frac{r_2}{c})) \vec{u}_\theta$$

1. Commenter le fait que le terme en $1/r$ est évalué à l'ordre 0 pour le champ rayonné par les deux dipôles.
2. A l'aide d'un développement limité, évalué r_1 et r_2 en fonction de r , a et θ .
3. Calculer le champ magnétique associée au champ électrique en vous servant de vos connaissances sur la structure locale de l'onde rayonnée.
4. Calculer le vecteur de Poynting ainsi que sa moyenne temporelle.
5. Si l'on étudie le cas où $2a = \lambda/2$, appelé antenne demi onde, l'indicatrice de rayonnement, représentation graphique dans la direction \vec{u}_r du module du vecteur de Poynting moyen dans cette direction sur la sphère de rayon r , est représenté figure 2.2. Commenter et comparer à l'indicatrice de rayonnement du dipôle rayonnant seul de l'exercice précédent.
6. Comment étudier une véritable antenne demi onde ?

Commentaire :

D'après écrit centrale. Un exercice peu difficile car très directif (sauf la dernière question que j'ai ajouté pour l'esprit physique et le lien avec l'optique ondulatoire). La méthode de développement limité rencontrée ici est essentielle. La méthode de calcul du champ magnétique est fortement suggéré : l'onde a localement la structure d'une onde plane et au final, encore une fois, l'interprétation graphique à l'aide de l'indicatrice de rayonnement est privilégiée.

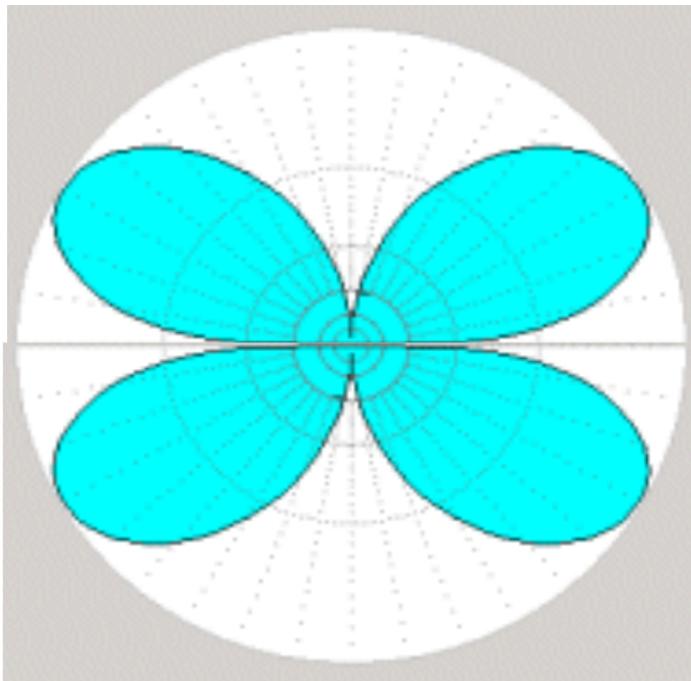


FIGURE 3.2 – Indiatrice de rayonnement de l'antenne demi onde.

Chapitre 4

Onde électromagnétique dans les milieux.

4.1 Ondes électromagnétiques dans les plasmas.

Remarque préliminaire :

Ce premier exercice est un exercice un peu particulier. Il ne s'agit pas de l'étude d'une onde électromagnétique dans un diélectrique comme nous l'avons vu dans le cours. Ici, les charges ne sont pas liées mais libres. Néanmoins, il ne s'agit pas non plus du vide et cet exercice ne saurait rentrer dans le chapitre ci avant. Il s'agit donc d'une situation que nous ne rencontrerons qu'en exercice (mais qui est pourtant loin d'être anecdotique tant d'un point de vue des idées physiques, que d'un point de vue préparation aux concours). Il est important de bien distinguer les catégories d'exercices, pour n'appliquer les résultats du cours que dans leur cadre de validité.

Un plasma d'hydrogène est un milieu assimilé à un gaz où les atomes d'hydrogène sont totalement ionisés, donc le plasma est constitué d'électron $(-e, m_e)$ et de proton (e, m_p) . Au repos, en l'absence de perturbation, le plasma est localement neutre : il y a n_0 électrons par unité de volume et n_0 protons par unité de volume.

4.1.1 Onde longitudinale dans les plasmas

On étudie dans cette partie l'effet d'une onde électromagnétique $\vec{E}_1 = E_1(x, t)\vec{u}_x = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_x$, \vec{B}_1 .

Cette onde met en mouvement les charges et on note $\vec{v}_e = \vec{v}_{1,e}(x, t)\vec{u}_x$ la vitesse des électrons et $\vec{v}_p = \vec{v}_{1,p}(x, t)\vec{u}_x$ celles des protons.

De plus, cette onde modifie la répartition spatiaux-temporelle des charges de telle sorte que le nombre de charges par unité de volume en présence de l'onde s'écrit pour les électrons $n_e = n_0 + n_{1,e}(x, t)$ et de manière similaire pour les protons $n_p = n_0 + n_{1,p}(x, t)$.

Tous les champs d'ordre 1 introduits sont des infiniments petits du même ordre et on se limite à l'ordre 1 en cet infiniment petit.

1. Justifier l'appellation onde plane et longitudinale.
2. Montrer que $\overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{0}$. En déduire $\vec{B}_1 = \vec{0}$

3. Calculer la densité de courant volumique \vec{j} . En déduire que

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{n_0 e}{\epsilon_0} (\vec{v}_{1,p} - \vec{v}_{1,e})$$

4. En appliquant la seconde loi de Newton a un électron, montrer que

$$\frac{\partial \vec{v}_{1,e}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} E_1(x, t)$$

5. Faire de même avec les protons et montrer qu'alors $v_{1,p} \ll v_{1,e}$.
6. Montrer alors que la relation de dispersion est

$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}$$

Commenter le comportement du plasma.

7. Calculer le vecteur de Poynting, et l'énergie moyenne volumique, et les pertes par effet joule en valeur moyenne.

4.1.2 Onde transversale dans les plasmas

On étudie dans cette partie l'effet d'une onde électromagnétique $\vec{E}_1 = E_1(x, t)\vec{u}_y = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$, \vec{B}_1 .

Cette onde met en mouvement les charges et on note $\vec{v}_e = \vec{v}_{1,e}(x, t)\vec{u}_x$ la vitesse des électrons et $\vec{v}_p = \vec{v}_{1,p}(x, t)\vec{u}_x \simeq 0$ puisque (comme dans la partie précédente) la vitesse des protons peut être négligée devant celle des électrons.

De plus, cette onde modifie a priori la répartition spatiaux-temporelle des charges de telle sorte que le nombre de charges par unité de volume en présence de l'onde s'écrit pour les électrons $n_e = n_0 + n_{1,e}(x, t)$.

Tous les champs d'ordre 1 introduits sont des infiniment petits du même ordre et on se limite à l'ordre 1 en cet infiniment petit.

1. Montrer que le plasma reste localement neutre à partir des équations de Maxwell, soit $n_{1,e} = 0$ (i.e. la répartition de charge reste uniforme, n_0)
2. Montrer que

$$\vec{B}_1 = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$$

3. En justifiant brièvement que l'on peut négliger la force magnétique devant la force électrique, étudier le mouvement de l'électron.

En déduire que la conductivité complexe du plasma :

$$\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E} \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma} = \frac{n_0 e^2}{j m_e \omega}$$

Qu'en déduire pour la puissance dissipée par effet Joule (puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge) ?

4. Montrer que la relation de dispersion est

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e}$$

5. Pour qu'une onde progressive puisse exister, montrer qu'il faut que

$$\omega > \omega_C = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}}$$

6. Calculer alors la vitesse de phase et de groupe en fonction de ω et ω_C . Commenter.

7. Interpréter le comportement haute fréquence.

8. Calculer le vecteur de Poynting associé à cette onde, ainsi que sa moyenne temporelle ?

9. Calculer l'énergie électromagnétique associée à cette onde. Commenter la propagation de l'énergie dans ce cas.

Commentaire :

D'après écrit et oral de tous les concours. Les plasmas sont des grands classiques. Leur étude fait l'objet de nombreux sujets d'écrits et d'oraux et ils constituent un domaine de recherche actif. Certes, un plasma peut paraître un milieu exotique mais il en existe de nombreux exemple, la ionosphère, la couronne des étoiles,... Le cas de l'onde longitudinal est un moins fréquent mais le cas de l'onde transverse est un classique avec sa relation de dispersion $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_C^2}{c^2}$ dont l'étude est à parfaitement maitisée (calcul de vitesse de phase, vitesse de groupe, interprétation physique finale).

Complément :

Les ondes radio modulées en amplitude (AM) ont une fréquence inférieure à la fréquence de coupure de la ionosphère. Ces ondes sont donc totalement réfléchiées par la ionosphère et ainsi il est possible d'entre radio Londres de France (La propagation en ligne droite ne suffisant pas.) Par contre, pour la FM, qui utilise des fréquences plus élevées supérieures à la fréquence de coupure, les ondes traversent la ionosphère ce qui limite la portée de ces ondes...

4.2 Démonstration des lois de Snell Descartes, amplitude sous incidence oblique.

Un dioptre plan $z = 0$ sépare deux milieux diélectriques l'air et l'eau d'indice $n_1 = 1$ pour $z > 0$ et $n_2 = 1,33$ pour $z < 0$. Une onde incidente OPPH PR selon \vec{u}_x arrive sous un angle $i_1 = 30^\circ$ de $x = +\infty$. Elle donne naissance sur le dioptre à une onde réfléchiée de vecteur d'onde \vec{k}_r et une onde transmise de vecteur d'onde \vec{k}_t . Le but de cet exercice est de retrouver les vecteurs d'ondes transmis et réfléchies.

1. Rappeler par rapport à quelle direction est mesuré l'angle d'incidence (algébrisé)
2. Rappeler les lois de Snell Descartes (en 3 points) que l'exercice cherche à redémontrer.
3. Ecrire complètement l'onde électromagnétique incidente, réfléchiée et transmise.

4. Rappeler les relations liant ces champs à l'interface.

5. En déduire que :

$$\vec{k}_{i,t} = \vec{k}_{r,t} = \vec{k}_{tr,t}$$

où t désigne la composante tangentielle du vecteur d'onde.

6. Retrouver alors les 3 points de la loi de Snell Descartes.

7. Calculer sous cette incidence, le coefficient en réflexion en amplitude r de l'onde ainsi que le coefficient de transmission en amplitude tr .

Commentaire :

D'après oral et écrit Centrale, CCP. Un exercice très proche du cours. Seule la dernière question n'est pas du cours mais une extension de la situation du cours puisque les coefficients de réflexion transmission n'ont été vu que sous incidence normal. Néanmoins l'exercice reste facile dans la mesure où seule une polarisation est étudiée, pour une incidence particulière.

4.3 Au delà des lois de Snell Descartes : onde evanescente.

On s'intéresse dans cette exercice à une onde incidente $\vec{E}_i = E_0 \vec{u}_x \exp j(\omega t - k_1 x - k_1 z) \vec{u}_y$ sur un dioptre plan en $z=0$ séparant le verre d'indice $n = 1,5$ ($z < 0$) de l'air d'indice 1 ($z > 0$). L'angle d'incidence égale $i_1 = 60^\circ$.

1. Calculer k_{1x} et k_{1z} en fonction de n , λ_0 longueur d'onde dans le vide, et i_1 .
2. Que donne les lois de Snell Descartes pour de la lumière arrivant sous pareille incidence.
3. On suppose néanmoins la présence d'une onde transmise (et aussi d'une onde réfléchie) :

$$\vec{E}_r = E_0 \vec{u}_r \exp j(\omega t - k_1 x + k_1 z) \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_t = E_0 \vec{u}_t \exp j(\omega t - k_2 x - k_2 z) \vec{u}_y$$

Calculer k_{2x} et k_{2z}

4. Calculer le champ électrique réel \vec{E}_t . Commenter.
5. Calculer le champ magnétique correspondant à chaque onde.
6. Calculer le vecteur de Poynting de l'onde transmise. Commenter.

Commentaire :

D'après oral et écrit Mines. Un exercice sur la génération d'onde evanescente au delà de l'angle limite donnée par l'optique géométrique. Cette onde evanescente peut être récupérée et exploiter pour de la microscopie de surface puisque l'onde n'est importante qu'en surface (on parle alors de réflexion totale frustrée). La présence d'onde evanescente peut être mis à profit pour expliquer ondulatoirement le passage par effet tunnel de particules à travers une barrière de potentielle.

4.4 Réflexion vitreuse : l'incidence de Brewster et le modèle du dipôle rayonnant.

Si l'on s'intéresse à la réflexion de la lumière sur un sol plastifié sous incidence quelconque (oblique), il convient de distinguer deux polarisations possibles : la polarisation parallèle (i.e. parallèle au plan d'incidence, donc dans le plan d'incidence) et la polarisation perpendiculaire (i.e. perpendiculaire à la précédente, donc perpendiculaire au plan d'incidence) On constate que la lumière qui se réfléchit sous un certain angle, appelé l'angle de Brewster, sur un sol plastifié est polarisée rectilignement.

Proposer une interprétation du phénomène et calculer l'angle de Brewster sachant que l'onde incidente est réémise par les dipôles dans le sol plastifié. *Commentaire :*

Un tout nouvel exercice. Ici le problème est ouvert, très peu directif. Il faut donc que vous preniez l'initiative en vous servant de l'indication donnée. La première étape est comme d'habitude la réalisation d'un schéma très clair, faisant apparaître les deux polarisations définies dans l'énoncé. Puis il faut réfléchir aux dipôles dans le sol plastifié, qui rerayonnent l'onde. Indication supplémentaire : faire une analogie avec la diffusion Rayleigh, pourquoi le ciel bleu est-il polarisé dans une certaine direction ? En outre cette polarisation est intéressante car la direction de polarisation est connue a priori, ce qui permet de déterminer la direction de polarisation des polarimètres. Cela explique aussi l'intérêt de verre de lunette polarisée très efficace en mer ou à la neige pour la lumière réfléchie !

4.5 Modèle électromagnétique de la fibre optique.

On s'intéresse à une fibre optique à saut d'indice d'axe Oz : le coeur de la fibre, compris entre $x = -R = 10\mu m$ et $x = +R$ est un diélectrique d'indice $n_C = 1,5228$, alors que la gaine située de part et d'autre est diélectrique d'indice $n_g = 1,5033$ (la symétrie cylindrique est ici omise au profit d'une géométrie cartésienne mais sans que cela ne modifie la généralité des résultats). On souhaite étudier la propagation d'une onde de la forme :

$$\vec{E}_C = f(x, y) \cos(\omega t - k_c z) \vec{u}_y \text{ dans le coeur}$$

$$\vec{E}_G = g(x, y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_y \text{ dans la gaine}$$

1. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$
2. Calculer \vec{B}_C et \vec{B}_G Commenter.
3. Traduire les Conditions aux limites sur les dioptries. En déduire :

$$k_1 = k_2$$

$$f(\pm R) = g(\pm R)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pm R) = \frac{\partial g}{\partial x}(\pm R)$$

4. On cherche alors des solutions de la forme suivante :

$$f(x) = A \cos(\alpha x)$$

$$g(x) = B \exp(\beta x) \text{ pour } x < -R \text{ et } g(x) = B \exp(-\beta x) \text{ pour } x > R$$

Commenter et justifier le choix de ces expressions.

5. Montrer que la relation qui lie α et β est

$$\beta R = \alpha R \tan(\alpha R)$$

6. Etablir l'équation de propagation vectorielle du champ électrique dans le coeur et la gaine.

7. En déduire alors

$$(\alpha R)^2 + (\beta R)^2 = \frac{a^2 \omega^2 (n_1^2 - n_2^2)}{c^2}$$

8. A l'aide d'une discussion graphique sous Maple, trouver alors une condition pour que la fibre soit monomode.

9. Calculer le vecteur de Poynting de l'onde dans le coeur. Commenter.

Commentaire :

Extrait écrit X et CCP. Le problème de la fibre optique à saut d'indice est souvent traité en optique géométrique à l'aide d'un phénomène de réflexion totale, le problème de CCP débutait d'ailleurs par cette étude de première année, très classique. Ici le problème est différent puisque la fibre optique est traitée comme un guide d'onde ce qui compte tenu des dimensions de la fibre est sans doute préférable. Un exercice guidée mais avec de l'originalité.

4.6 Traitement anti reflet des verres.

Le traitement anti reflet d'un verre consiste en un dépôt d'épaisseur e et d'indice n_a . La lumière incidente rencontre donc deux interfaces :

- la première interface en $x=0$ qui sépare l'air ($x < 0$) d'indice 1 de la couche anti reflet $0 < x < e$ d'indice n_a
- une seconde interface en $x=e$ qui sépare la couche anti reflet $0 < x < e$ d'indice n_a du verre $x > e$ d'indice $n = 1,5$.

L'onde électromagnétique incidente (sous incidence normale va se réfléchir et se transmettre sur les dioptries de telle manière que

- pour $x < 0$ $\vec{E}_0 = E_{i_0} \exp j(\omega t - k_0 x) \vec{u}_z + E_{r_0} \exp j(\omega t + k_0 x) \vec{u}_z$
- pour $0 < x < e$ $\vec{E}_a = E_{t_a} \exp j(\omega t - n_a k_0 x) \vec{u}_z + E_{r_a} \exp j(\omega t + n_a k_0 x) \vec{u}_z$
- pour $x > e$ $\vec{E}_v = E_{t_v} \exp j(\omega t - n k_0 x) \vec{u}_z$

1. Commenter et justifier les champs électriques proposés ci-dessus.
2. Calculer complètement l'onde électromagnétique correspondante dans chacun des trois domaines.
3. Etablir la relation entre les amplitudes des champs.
4. Proposer une résolution avec Maple du système d'équation et montrer la condition pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie est

$$\frac{(n_a + 1)(n_a - n)}{(n_a - 1)(n_a + n)} \exp(-2j n_a k_0 e) - 1 = 0$$

5. En déduire des valeurs possibles pour n_a et e pour éviter le reflet dans le visible.
6. Commenter le fait qu'un léger reflet violet subsiste.

Commentaire :

Extrait oraux X, Mines, Centrale, CCP. Un exercice classique pour sa mise en place. La substitution finale est très calculatoire mais suggérée avec Maple ou dans le pre des cas seul E_{r_0} est à calculer. Cet exercice est à rapprocher d'autres exercices très similaires : la corde de Melde, le Fabry Perrot ou le filtre interférentiel sous incidence normale, le silencieux de voiture, la cavité Laser résonante... Tous ces exercices traitent d'une onde qui effectue un grand nombre d'aller retour entre deux interfaces et donne donc des interférences très sélectives. La dernière question fait appelle à la compréhension de ce phénomène et explique une observation courante.

4.7 Modélisation de l'eau.

Contrairement au cas des diélectriques usuels où la polarisation est induite, la molécule d'eau possède un moment dipolaire permanent et l'effet du champ électrique n'est alors que d'orienter les dipôles des différentes molécules.

1. Justifier à partir de vos connaissances en chimie que la molécule d'eau est polaire.
2. Pour décrire le vecteur polarisation de l'eau, on recourt au modèle suivant :

$$\tau \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = \chi_0 \epsilon_0 \vec{E}$$

avec $\tau = \frac{3}{2} \cdot 10^{-10} s$ et $\chi_0 = 80$. Comment interpréter physiquement cette équation ?

3. Calculer $\underline{\chi}$. En déduire $\underline{n} = n' + jn''$
4. Les représenter graphiquement. Calculer en particulier la fréquence pour laquelle l'eau absorberait un maximum l'onde incidente. Comparer la valeur des ondes électromagnétiques dans le microonde $f \simeq 3GHz$.
5. Comment interpréter le comportement de l'eau dans le visible ?
6. Dans le microonde, on constate qu'un gramme de glace fond très lentement, alors qu'un gramme d'eau liquide s'évapore rapidement. Est ce cohérent sachant que $l_F = 330 kJ.kg^{-1}$ et $l_v = 2400 kJ.kg^{-1}$. Proposer une interprétation du phénomène à partir des éléments fournis dans cet exercice.

Commentaire :

Extrait oral Mines et écrit CCP. Un exercice qui propose une alternative au modèle de l'électron élastiquement lié pour les milieux à molécule polaire. Il est intéressant de comprendre la différence de comportement du milieu en fonction de la fréquence d'excitation. L'interprétation de l'expérience, en apparence paradoxale du simple point de vue thermodynamique, est intéressante.

4.8 Milieux multicouche.

1. Dans cette question, on s'intéresse à une seule couche, appelée 1, d'indice n_1 , comprise entre $z = 0$ et $z = e_1$. Une onde incidente de longueur d'onde (dans le vide) λ telle que $2.n_1.e_1 = \frac{\lambda}{2}$ se propage dans ce milieu.

$$\vec{E}_1 = (A'_1 \exp(j\omega t - jk_0 n_1 z) + A''_1 \exp(j\omega t + jk_0 n_1 z)) \vec{u}_y \quad \text{pour } 0 < z < e_1$$

Déterminer \vec{B}_1

Par la suite, on note

$$\vec{E}_0 = (A'_0 \exp(j\omega t - jk_0 z) + A''_0 \exp(j\omega t + jk_0 z)) \vec{u}_y \quad \text{pour } z < 0$$

$$\vec{E}_2 = (A'_2 \exp(j\omega t - jk_0 n_2 z) + A''_2 \exp(j\omega t + jk_0 n_2 z)) \vec{u}_y \quad \text{pour } e_1 < z < e_2$$

Calculer A'_2 et A''_2 en fonction de A'_0 et A''_0 .

2. On envisage comme suggéré dans la question précédente une seconde couche d'indice n_2 , comprise entre $z = e_1$ et $z = e_2$ et telle que $2.n_2.e_2 = \frac{\lambda}{2}$.
Calculer A'_3 et A''_3 en fonction de A'_0 et A''_0 .

3. Le milieu est en réalité un milieu multicouche, constitués de N couches, d'indice n_k , comprise entre $z = e_k$ et $z = e_{k+1}$ avec $2.n_k.e_k = \frac{\lambda}{2}$. Déterminer A'_N et A''_N en fonction de A'_0 et A''_0 .
En déduire r et t les coefficients de réflexion transmission globaux en amplitude pour le milieu multicouche.

Commentaire :

Extrait écrit Mines. Un problème de milieu multicouche qui se rapproche du problème sur la couche anti reflet. Tout repose encore une fois sur la traduction des relations de passage à l'interface. La condition $2.n_1.e_1 = \frac{\lambda}{2}$ est très claire en terme de différence de marche.

Chapitre 5

Electromagnétisme dans l'ARQS, Induction.

5.1 Inductance propre et induction mutuelle de bobine.

5.1.1 Etude d'une unique bobine.

Dans cette première partie, on s'intéresse à une bobine de N spires, de longueur l , de rayon a , parcourue par un courant $i(t)$ lentement variable.

1. Rappeler le champ magnétique dans la bobine en négligeant les effets de bord.
2. Calculer le flux Φ de ce champ magnétique à travers la bobine. Montrer que ce flux est proportionnel à $i(t)$. Le coefficient de proportionnalité entre Φ et i est appelée L , coefficient d'autoinduction.
3. En déduire la fem induite dans la bobine par son propre champ magnétique.
4. Calculer l'énergie magnétique relative à l'existence du champ magnétique et comparer à l'énergie de la bobine.

5.1.2 Etude du couplage entre deux bobines.

Dans cette partie, on s'intéresse à deux bobines de N_1 et N_2 spires, de longueur l , de rayon a , parcourue par des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$. On suppose l'influence totale entre les bobines, ce qui signifie que toutes les lignes de champ magnétique d'une bobine traversent la seconde. (Ceci est possible grâce à un matériau qui canalise les lignes de champ).

1. Rappeler le champ magnétique total créé par les deux bobines en négligeant les effets de bord.
2. Calculer le flux Φ_1 de ce champ magnétique à travers la bobine. Montrer que ce flux est d'une part proportionnel à $i_1(t)$ et d'autre part à $i_2(t)$. Le coefficient de proportionnalité entre Φ et i_1 est appelée L , coefficient d'autoinduction et celui entre Φ et i_2 est appelé M , coefficient d'inductance mutuelle.
3. En déduire la fem induite dans la bobine 1.

5.1.3 Une application : le transformateur.

Dans cette partie, la bobine 1, d'inductance propre L_1 et de résistance interne R_1 est alimentée par un générateur de tension idéale $e(t) = e_0 \cos(\omega t)$. Cette bobine est couplée à une seconde d'inductance propre L_2 et de résistance interne R_2 qui est elle fermée sur une résistance d'utilisation R_u . Le couplage entre les deux bobines est caractérisé par le coefficient d'inductance mutuelle M .

Calculer les courants dans chacune des deux bobines.

Commentaire :

D'après oraux. Cet exercice est un exercice de cours, sur la définition des inductances mutuelles et des inductances propres. Le calcul est simple dans la mesure où le champ magnétique d'un solénoïde est connu. La dernière partie sur le transformateur est un classique mais aucune connaissance n'est exigible dans le domaine. Les lignes de champs magnétiques sont canalisées par un milieu ferromagnétique doux qui est feuilleté pour éviter l'échauffement par courant de Foucault et mis sous forme d'un cadre qui traverse les deux bobines.

5.2 Influence d'une spire sur une autre spire.

Deux spires de même rayon a sont placées sur un axe z . La spire 1 fixe, située en $z=0$ est parcourue par un courant $i_1(t)$. La spire 2, située en $z = 10a$, est elle parcourue par un courant $i_2(t)$.

1. Calculer le champ magnétique créé par une spire un point M de son axe.
2. En déduire le flux magnétique du champ magnétique de la spire à travers elle même. En déduire le coefficient d'inductance propre L .
3. En déduire le flux magnétique du champ magnétique de la spire 1 à travers la spire 2. En déduire le coefficient d'inductance mutuelle M .

Commentaire :

D'après oral CCP. Cet exercice est un exercice de cours, sur la définition des inductances mutuelles et des inductances propres. Le calcul est lié au calcul du champ magnétique créé par une spire qui doit être parfaitement maîtrisé.

5.3 Pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique est constituée d'un tore de section carrée de côté $a=5\text{cm}$, de rayon intérieur a , et donc de rayon extérieur $2a$, avec $N=10000$ spires. Ce circuit est de résistance $R=0,2\Omega$ et est mis en parallèle d'un ampèremètre de résistance interne $r_i=0,3\Omega$.

Cette pince sert à mesurer "sans contact" l'intensité i circulant dans un fil infini, parcourue par un courant $I = I_M \cos(\omega t)$ de fréquence $f=50\text{Hz}$. On note $i(t) = i_M \cos(\omega t)$ le courant dans le tore (la pince ampèremétrique).

1. Justifier que le champ magnétique total $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{u}_\theta$. Calculer le en tout point M à l'intérieur du tore.
2. Calculer le flux Φ à travers les N spires.

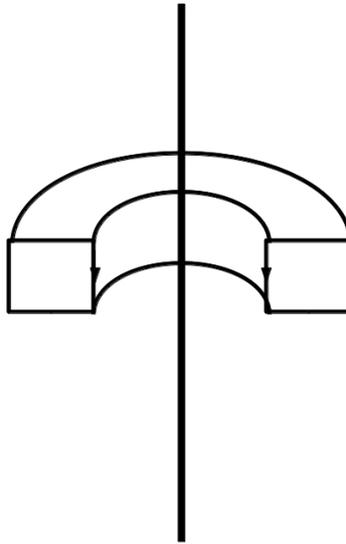


FIGURE 5.1 – La pince ampèremétrique.

3. En déduire le rapport $\frac{i_M}{I_M}$.

Commentaire :

D'après oral CCP. Cet exercice est un exercice très classique et dont l'application est importante. Ici le calcul du champ magnétique est à faire par le théorème d'ampère et le champ magnétique dans un système torique est identique à celui d'un solénoïde infini.

5.4 Freinage électromagnétique : le rail de Laplace

On considère le dispositif expérimental des rails de Laplace. Un rail métallique de résistance interne négligeable roule sans glisser sur un circuit électrique fermé par une résistance R (non présentée sur la photo). Ce rail de longueur utile l , est lancé avec une vitesse $v_0 \vec{u}_x$ selon la direction des deux fils parallèles du circuit. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire dirigé selon la verticale ascendante $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

1. Expliquer qualitativement la nature des phénomènes mis en jeu et l'évolution a priori du mouvement de la barre.
2. Calculer la force électromotrice induite dans la barre.
3. Etudier le schéma électrique équivalent au circuit en précisant avec soin la convention.
4. Calculer les forces de Laplace dans la barre.
5. Etudier l'évolution mécanique de la barre.

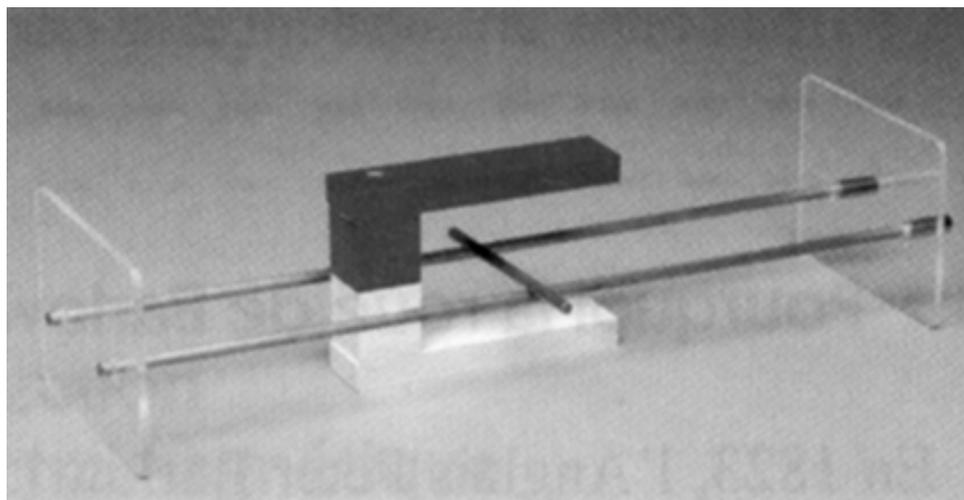


FIGURE 5.2 – Le dispositif des rails de Laplace.

6. En déduire l'équation différentielle régissant la vitesse de la barre. Conclure et commenter.

Commentaire :

D'après oraux. Ainsi posé, cet exercice est un exercice de cours. La première question, bien rarement posée, à un intérêt fort. Une fois l'enchaînement des idées physiques compris, la logique de l'exercice est claire, et comme la loi de Lenz permet de présenter le comportement, cette analyse peut être et doit être proposée spontanément. La démarche est ensuite classique : établir la fem induite et donc en déduire le schéma électrique équivalent ; établir les forces de Laplace et l'équation mécanique. Regrouper ces deux équations pour étudier la grandeur souhaitée par l'énoncé. Il est à noter que cet exercice se décline aux concours sous de multiples formes : le circuit est fermé par un condensateur et/ou une bobine et/ou un générateur... Ici l'aspect freinage du rail est aussi intéressant puisque l'induction permet de freiner les camions, les TGV et les vélos d'appartement.

5.5 Rail de Laplace alimenté.

On considère le dispositif expérimental des rails de Laplace. Un rail métallique de résistance interne R roule sans glisser sur un circuit électrique fermé par une résistance R , identique à la résistance de la barre, et un générateur de tension délivrant une fem constante E . Le rail de longueur utile l , est immobile initialement. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire dirigé selon la verticale ascendante $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

1. Expliquer pourquoi le rail se met en mouvement et quel peut être son mouvement ultérieur.
2. Trouver l'équation mécanique de la barre.
3. Trouver l'équation électrique de la barre.
4. En déduire l'équation différentielle régissant la vitesse de la barre. Conclure et commenter.

Commentaire :

D'après oral CCP. un exercice très proche du cours, sans difficulté.

5.6 Deux rails de Laplace

Le dispositif expérimental est constitué de deux rails de Laplace. Chaque rail métallique de longueur utile l et de résistance interne R roule sans glisser sur un circuit électrique fermé par une résistance R , identique à la résistance de la barre. Le rail 1, initialement en $x_1(0) = l$ est immobile initialement alors que le rail 2, initialement en $x_2(0) = 2l$, est lancé avec une vitesse $v_0\vec{u}_x$. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire dirigé selon la verticale ascendante $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$. On constate expérimentalement que les deux rails se mettent en mouvement.

1. Calculer la fem induite dans chaque barre.
2. Dessiner alors le circuit électrique équivalent au circuit avec soin.
3. En déduire l'équation électrique du circuit.
4. Etablir les forces de Laplace dans chaque barre
5. Trouver l'équation mécanique de chaque barre.
6. Etudier le mouvement de chacune des barres à l'aide de $S(t) = x_1(t) + x_2(t)$ et de $D(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Commenter.
7. Faire une étude énergétique du mouvement.

Commentaire :

D'après oral Mines. un exercice proche du cours, sans grande difficulté mais qui repose sur le dessin propre du circuit électrique équivalent. Comme le système comprend plusieurs mailles, l'étude est plus longue mais reste calculatoirement facile. La fin de l'exercice est guidée pour parvenir à résoudre les deux équations différentielles couplées.

5.7 Rail de Laplace dans un champ magnétique non uniforme.

On considère le dispositif expérimental des rails de Laplace. Un rail métallique de résistance interne négligeable roule sans glisser sur un circuit électrique fermé par une résistance R et une capacité C . Ce rail de longueur utile l , est lancé avec une vitesse $v_0\vec{u}_x$ selon la direction des deux fils parallèles du circuit. L'ensemble est placé dans un champ magnétique créé par un fil infini, situé à une distance l en dessous des rails de Laplace, parcouru par un courant I_0 , stationnaire.

1. Calculer le champ magnétique créé par le fil infini.
2. Calculer la force électromotrice induite dans la barre mobile.
3. Etudier le schéma électrique équivalent au circuit en précisant avec soin la convention.
4. Calculer les forces de Laplace dans la barre.
5. Etudier l'évolution mécanique de la barre.
6. En déduire l'équation différentielle régissant la vitesse de la barre. Conclure et commenter.

Commentaire :

D'après oral Mines. un exercice de plus sur les rails de Laplace. Celui diffère un peu dans la mesure où le champ magnétique est bien stationnaire mais non uniforme. Tous les points de la barre ne sont pas soumis au même champ. Il est à noter que cela pourrait faire pivoter la barre mais cela n'est pas pris en compte dans cette exercice. Enfin la présence du condensateur complique un peu le calcul.

5.8 Chute d'une spire au dessus d'une autre spire.

Deux spires de même rayon a sont placées sur un axe z . La spire 1 fixe, située en $z=0$ est parcourue par un courant i_1 . La spire 2, qui se translate librement sur l'axe Oz , est initialement située en $z = 100.a$. Elle est de masse m , de résistance R et on néglige son auto inductance L . Cette spire 2 tombe sous l'effet de son poids.

1. Que se passe-t-il qualitativement ?
2. Calculer le champ magnétique créé par la première spire en un point M de coordonnée z de l'axe.
3. Calculer la fem induite dans la spire 2.
4. Calculer le courant dans la spire 2 (le courant est orienté par l'axe Oz) ? Quelle serait la direction du champ magnétique 2 créée par cette spire ? Commenter ? Pourquoi le néglige-t-on ?
5. Quelle est la force de Laplace sur la spire 2 ? Quel est le problème rencontré ?
6. En utilisant le fait que le flux du champ magnétique sur une surface fermée est nulle, en considérant une surface cylindrique de rayon r et de hauteur dz , montrer que

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

En déduire B_r

7. Calculer alors la force de Laplace sur la spire 2 en tenant compte de la composante du champ magnétique calculée ci dessus.
8. Trouver alors l'équation différentielle de z . Commenter. La lévitation magnétique est elle possible ?

Commentaire :

D'après oral X, Mines. Cet exercice est plus difficile dans la mesure où il n'est pas possible de se contenter du champ magnétique créé par la spire sur l'axe, il faut donc avoir (indirectement, sous forme intégrale) recours à la $\text{div}\vec{B}=0$. Néanmoins, la démarche de l'exercice est toujours la même, équation électrique, équation mécanique et l'interprétation avec la loi de Lenz riche en physique.

5.9 La Roue de Barlow

Une roue de Barlow est modélisée comme un disque métallique homogène de centre O et de rayon a , de moment d'inertie J par rapport à son axe Oz horizontal autour duquel il peut tourner sans

frottement. Cette roue, équivalente à un dipôle, entre dans un circuit électrique fermé. Les bornes de ce dipôle étant le centre O et un point de la périphérie I. La totalité de la surface du disque est placée dans un champ magnétique uniforme et constant parallèle à l'axe Oz. On négligera tout phénomène d'auto-induction et le reste du circuit fermé est une résistance R.

1. Déterminer la fem induite sur la portion OI du circuit lorsque la roue tourne à la vitesse angulaire instantanée ω (par la circulation du champ électromoteur sur un arc OI).
2. Déterminer alors le courant dans le circuit (équation électrique).
3. Déterminer la force de Laplace élémentaire exercée sur un élément de circuit pris dans le disque, son moment par rapport à l'axe et le moment total des forces de Laplace sur tout le disque. En déduire l'équation mécanique du mouvement du disque.
4. Déterminer alors le mouvement du disque lorsque les conditions initiales sont les suivantes : à $t = 0$ la roue est lancée à la vitesse angulaire ω_0 . Faire un bilan énergétique.
5. Un opérateur exerce maintenant un couple Γ constant sur la roue. Établir la nouvelle équation mécanique. Chercher la solution en régime permanent et faire un bilan énergétique : où passe la puissance fournie par l'opérateur ?

Commentaire :

D'après oral et écrit centrale, CCP. Cet exercice est un exercice classique. Dans cette version, la résolution est guidée vers une solution simple qui évite ainsi une partie du problème.

5.10 Mise en rotation d'une spire.

On considère le dispositif représenté figure 4.3. Une grande spire 1 circulaire de rayon a et de centre O est alimentée via une résistance R et un interrupteur K par un générateur de tension parfait E. Une seconde spire de rayon $b \ll a$ et de centre O, de résistance R, est placée sur un axe de rotation Oz et son moment d'inertie sur cet axe est J. Les inductances propres sont négligeables. L'ensemble de ces deux spires est placé dans un champ magnétique extérieur $B_e \vec{u}_y$.

Lors d'une première phase du mouvement très brève, l'interrupteur K est fermé et le courant i_1 dans la spire 1 passe donc de 0 à sa valeur en régime permanent. Pendant cette phase, la spire 2 ne bouge pas (du fait de son inertie) mais acquiert une vitesse angulaire ω_0 . Cette phase est appelée "percuSSION". Dans une seconde phase, la spire 2 tourne sur elle-même, à partir de la vitesse angulaire ω_0 .

1. Interpréter qualitativement chacune des deux phases du mouvement.
2. Etude de la phase 1 : induction dans un champ non stationnaire et un circuit fixe.
 - (a) Calculer la valeur du courant i_1 en régime permanent.
 - (b) Calculer le courant induit dans la petite spire 2.
 - (c) En assimilant la petite spire à un dipôle magnétique \vec{M}_2 , et sachant qu'elle est soumise à un couple $\vec{\Gamma} = \vec{M}_2 \wedge \vec{B}_{tot}$, calculer ω_0 en intégrant le théorème du moment cinétique sur l'ensemble de la phase 1.
3. Etude de la phase 2 : induction dans un champ stationnaire et un circuit mobile.

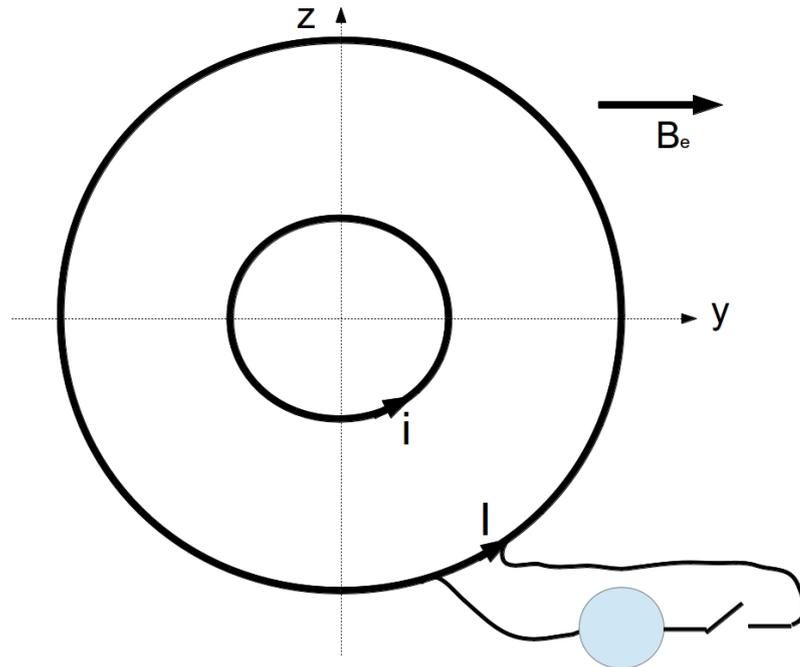


FIGURE 5.3 – Percussion magnétique pour la mise en rotation d'une spire.

- Calculer le courant induit dans la petite spire 2.
- Trouver l'équation différentielle vérifiée par $\omega(t)$.

Commentaire :

D'après oral Mines. Cet exercice est un exercice qui permet la révision de l'ensemble des phénomènes d'induction puisqu'il fait étudier les deux situations de cours. Un exercice riche. Les résultats sur le dipôle magnétiques sont rappelés mais il faut les connaître. Par ailleurs cet exercice peut faire penser à des situations rencontrées dans le cas des moteurs à induction, ce qui le rend intéressant ; il faudrait que le champ magnétique extérieur soit un champ tournant pour qu'il entraîne la spire.

5.11 Le haut parleur.

Un haut parleur permet la conversion d'une information électrique en onde sonore : il s'agit donc d'un système électromécanique, représenté figure 4.4. L'aimant en E, ici horizontal et vue en coupe, est source d'un champ magnétique radial, connu uniquement dans l'entrefer, $\vec{B} = B_r \vec{u}_r$. Une bobine de N spires, de rayon a, de résistance interne R et d'inductance propre L est enroulée sur une membrane mobile. La bobine est alimenté par un générateur de tension idéal de fem $e_G(t)$. L'ensemble membrane et bobine est de masse m et est maintenu dans une position d'équilibre par une suspension que l'on modélisera par une force de rappel élastique de raideur k. Enfin l'interaction de la membrane avec l'air afin de créer l'onde sonore est modélisée par une force de frottement fluide $-f\vec{v}$.

- Calculer le champ électromoteur \vec{E}_m puis la force électromotrice induite dans la bobine du fait de son mouvement dans le champ magnétique de l'aimant.

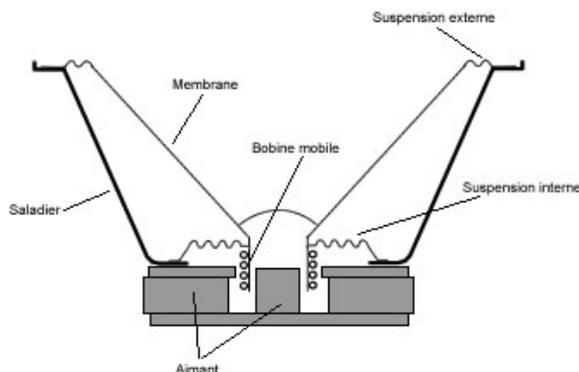


FIGURE 5.4 – Schéma en coupe du Haut Parleur.

2. Etudier le schéma électrique équivalent au circuit en précisant avec soin la convention.
3. Calculer les forces de Laplace sur la bobine.
4. Etudier l'évolution mécanique de l'ensemble membrane bobine.
5. Justifier qu'il est judicieux de supposer $e_G(t)$ de la forme $e_0 \cos(\omega t)$
6. Passer les deux équations suivantes aux complexes. On notera ω_0 la pulsation propre mécanique et Q le facteur de qualité mécanique.
7. Calculer alors l'impédance du haut parleur $\underline{Z}_{HP} = \frac{e_G}{i} = \frac{e_0}{i_0}$
8. Calculer la vitesse \underline{v}_0 de la membrane en fonction de e_0
9. Interpréter \underline{Z}_{HP} et \underline{v}_0 pour $\omega \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$ et $\omega = \omega_0$. Quelle situation est la plus favorable à la restitution d'un son ?
10. Faire un bilan de puissance du haut parleur. Que dire du couplage électromécanique ?
11. Faire le bilan de puissance moyenne du haut parleur. Définir alors le rendement du haut parleur ? Sur quelles paramètres jouer pour le maximiser ?

Commentaire :

D'après écrits centrale et CCP. Ce problème est un problème de cours. Le calcul de la fem induite est guidée ce qui évite d'utiliser ici la loi de Lenz. L'obtention des équations électriques et mécaniques est très classique, tout comme le passage au complexe. La caractérisation et l'interprétation du comportement électrique et mécanique global est calculatoire mais sans difficulté et les conclusions sont riches. Enfin le bilan de puissance est un point de passage obligé. La méthode d'obtention à partir

des équations mécaniques et électriques soit être maîtrisée. L'interprétation est elle aisée. Il faut se rappeler que $\langle \frac{df}{dt} \rangle_T = 0$ en régime sinusoïdal forcé. Le rendement est défini comme toujours par la grandeur utile (le son émis ici) divisée par la grandeur coûteuse (ici la puissance du générateur).

5.12 L'effet de peau : électromagnétisme dans les métaux.

On s'intéresse à un conducteur pour lequel la loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

1. Etude de la densité volumique de charge ρ du conducteur.

Montrer à partir de l'équation de conservation de la charge que ρ est solution de l'équation :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Sachant que $\sigma \simeq 10^8 \text{ S.m}^{-1}$, calculer un ordre de grandeur des variations temporelles de ρ . Sachant que l'on s'intéresse à des fréquences $< 10^{16} \text{ Hz}$, justifier que l'on peut considérer $\rho = 0$. Ce résultat est général : un conducteur est localement neutre.

2. Montrer dans l'équation de Maxwell $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ que le terme $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant le terme $\mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$.

Les équations de Maxwell sont alors les mêmes que dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires.

3. Montrer à partir des équations de Maxwell dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires que l'équation de propagation est

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4. Cette équation est une équation de diffusion. Donner alors la dimension du coefficient D et une première estimation de l'épaisseur de peau.

5. On suppose alors que le métal occupe tout le demi espace $z > 0$, l'espace $z < 0$ étant occupé par l'air assimilé à du vide. La solution cherchée est de la forme $\vec{E} = E(z, t) \vec{u}_x$

Montrer que la relation de dispersion est la suivante

$$k^2 = -j \mu_0 \sigma \omega$$

6. En utilisant le fait que $-j = \frac{(1-j)^2}{2}$, trouver l'expression de $k(\omega) = k'(\omega) + j k''(\omega)$. En déduire la forme de \vec{E} et conclure quant à l'épaisseur de peau.

7. Calculer le champ magnétique résultant.