

Rappel de Physique des Ondes.

Ph. Ribière ribierep@orange.fr

Avril 2011



FIGURE 1 – Radar Roland

Ce polycopié est rédigé d'une manière un peu particulière, non comme un cours au sens strict du terme mais comme une succession d'exercices très détaillés (la réponse est donnée à chaque étape) afin de ne rappeler que les résultats essentiels et la démarche logique pour y parvenir. Les calculs sont donc à faire par ailleurs.

L'objectif premier de ce polycopié est d'étudier les ondes électromagnétiques et les rayonnements de ces ondes par les antennes.

Table des matières

1	Onde dans un câble coaxial : modèle pour la propagation d'onde.	5
1.1	Equation de d'Alembert.	6
1.1.1	Mise en équation du problème.	6
1.1.2	Résolution de l'équation de D'Alembert.	6
1.1.3	Retour sur la ligne bifilaire idéale.	8
1.2	Dispersion et absorption	9
1.2.1	La ligne bifilaire réelle.	9
1.2.2	Dispersion et absorption.	9
1.2.3	Retour sur la ligne bifilaire réelle.	12
2	Rappel d'électromagnétisme.	15
2.1	Equation de Maxwell.	15
2.2	Energie électromagnétique.	15
2.3	Relation de passage.	16
3	Les ondes électromagnétiques dans le vide.	17
3.1	Equation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.	17
3.2	Rappel sur la polarisation des OPPH.	18
3.3	Aspect énergétique de la propagation des ondes électromagnétiques	19
3.4	Rayonnement dipolaire, introduction aux antennes.	21
3.4.1	Présentation du modèle : dipôle oscillant dans sa zone de rayonnement.	21
3.4.2	Expression du champ rayonné.	21
3.4.3	Puissance rayonnée.	22
3.4.4	La diffusion Rayleigh et le bleu du ciel.	22
3.5	Le guide d'onde : dispersion due aux conditions aux limites.	25
4	Onde dans les milieux.	27
4.1	L'effet de peau : électromagnétisme dans les métaux.	27
4.2	ondes électromagnétiques dans les plasmas.	28
4.2.1	Onde longitudinale dans les plasmas	28
4.2.2	Onde transversale dans les plasmas	29
4.3	Réexpression des équations de maxwell dans les milieux.	30
4.3.1	Expression générale des équations de Maxwell dans la matière.	30

4.3.2	Modèle de milieu diélectrique linéaire homogène isotrope peu dense.	31
4.3.3	Le gaz, exemple de milieu diélectrique linéaire homogène isotrope peu dense .	31
4.3.4	Etude des ondes dans un milieu diélectrique linéaire homogène isotrope peu dense.	31
4.3.5	Réflexion et réfraction d'une onde électromagnétique à l'interface de deux milieux diélectriques linéaires homogènes isotropes peu denses.	32

Chapitre 1

Onde dans un câble coaxial : modèle pour la propagation d'onde.

Ce chapitre est un chapitre d'introduction aux phénomènes ondulatoires sur un exemple d'onde plus facile dans un premier temps à interpréter que les ondes électromagnétiques. Il s'agit d'onde de courant et de tension (en fait ce sont des ondes électromagnétiques déguisées), plus facile à appréhender et donc plus approprié pour introduire les idées de la physique des ondes. En outre, pour établir l'équation de propagation, il faut recourir au développement limité qui est une méthode couramment utilisée en physique en générale et en physique des ondes en particulier dans les calculs. La démarche en plus des résultats présentent donc un intérêt particulier.

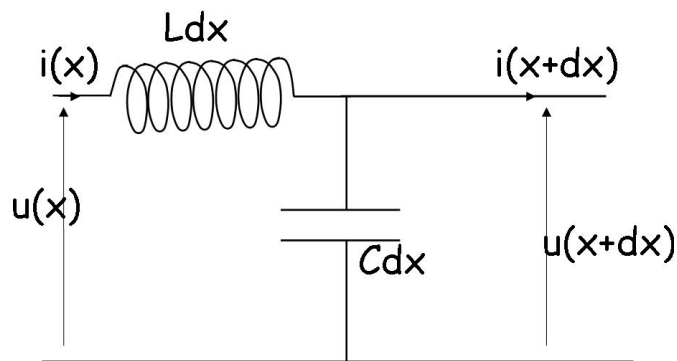


FIGURE 1.1 – Modèle d'une tranche dx de câble coaxial idéal .

1.1 Equation de d'Alembert.

1.1.1 Mise en équation du problème.

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale (cable coaxial) est composée d'une inductance $l \cdot dx$ et d'une capacité γdx .

1. Rappeler pourquoi il est possible de travailler sur la tranche d'épaisseur dx dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) alors que le phénomène étudié est un phénomène de propagation.
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ et $i(x,t)$.
3. Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ sont solutions d'équations de d'Alembert. Quelle est la vitesse de propagation des ondes ?

1.1.2 Résolution de l'équation de D'Alembert.

L'équation trouvée ci dessus est appelée équation de d'Alembert.

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0 \quad \text{cas unidimensionnel}$$

$$\Delta a - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec } \Delta \text{ l'opérateur Laplacien généralisation au cas tridimensionnel}$$

$$\square a = 0 \quad \text{avec } \square \text{ l'opérateur d'Alembertien}$$

Recherche de la solution générale.

1. Introduire pour nouvelle variable $u = t - \frac{x}{c}$ et $v = t + \frac{x}{c}$. Montrer en faisant le changement de variable que l'équation de d'Alembert devient dans ce système de coordonnées :

$$4. \frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v} = 0$$

2. En déduire que la forme des solutions est $a(x,t) = f(u) + g(v) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$
3. Montrer que $a(x,t) = f(t - \frac{x}{c})$ correspond à une propagation dans le sens des x positifs, sans atténuation ni déformation.

Onde Plane Progressive Harmonique.

1. Justifier alors l'utilisation de la forme suivante pour $f(t - \frac{x}{c}) = A \cos(\omega(t - \frac{x}{c}))$.
2. Cette expression se met sous la forme abrégé $A \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$ ω désigne la pulsation et k le vecteur d'onde. Trouver le lien entre ces deux paramètres. Cette relation s'appelle relation de dispersion.
3. Dans les exercices, compte tenu de ce qui précède, il est courant de chercher la forme des solutions sous forme d'une Onde Plane Progressive Harmonique OPPH $A \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$. En injectant cette expression dans l'équation de d'Alembert, retrouver la relation de dispersion.

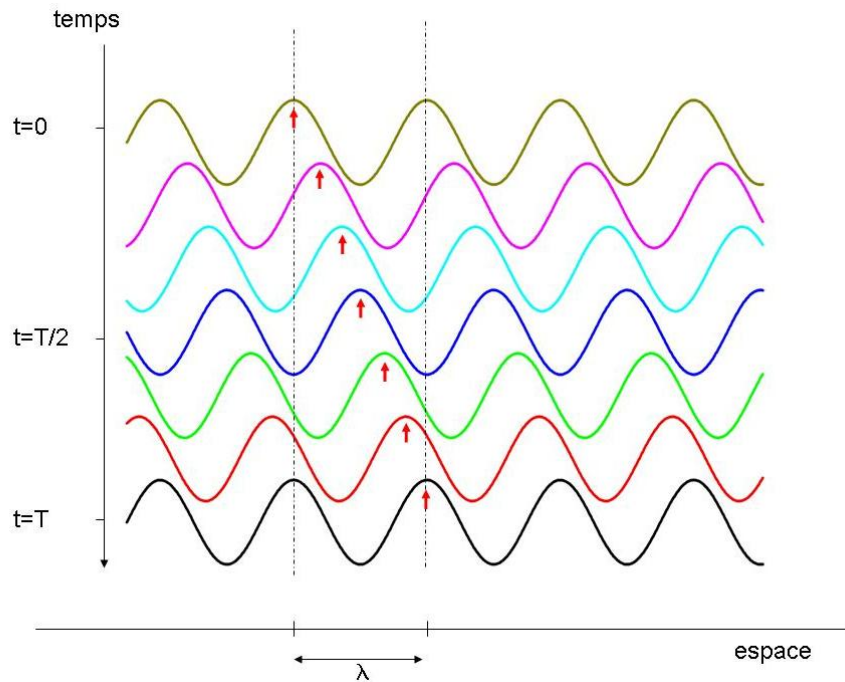


FIGURE 1.2 – L'Onde Plane Progressive Harmonique.

Onde stationnaire.

1. Chercher des solutions de l'équation de d'Alembert sous forme d'une fonction $a(x, t) = \xi(x)\psi(t)$.
2. Par séparation des variables (méthode générale importante), trouver l'équation dont $\xi(x)$ et $\psi(t)$ sont solution respectivement.
3. Montrer alors que $a(x, t) = A \cos(\omega t - \varphi_1) \cos(kx - \varphi_2)$
4. Justifier le nom d'onde stationnaire.

Onde progressive, onde stationnaire et détermination des constantes.

Il faut être conscient que les solutions sous forme d'ondes progressives ou sous forme d'ondes stationnaires sont parfaitement équivalentes.

La somme de deux ondes progressives de même amplitude mais de sens de propagation différent donne une onde stationnaire. (Ce qui se sent bien physiquement)

La somme de deux ondes stationnaires déphasées de $\frac{\pi}{2}$ donne une onde progressive.

Le choix de la forme des solutions est donc arbitraires (ce qui se montre mathématiquement)

Néanmoins le choix de la forme des solutions est guidé par les conditions aux limites imposées. Dans le câble coaxial infini, il n'y a aucune condition au limite, donc la forme des onde plane progressive harmonique est la mieux adaptée, il n'y a pas d'onde retour.

Dans le câble coaxial semi infini, l'exercice ci dessous, on impose une condition au limite en fermant

la ligne, cette condition au limite stricte guide donc vers le choix d'une solution de type onde stationnaire. L'onde incidente va se réfléchir à l'extrémité de la ligne bifilaire et repartir en sens inverse et donc finalement se superposer à l'onde incidente. (Une onde progressive selon $+\vec{u}_x$ s'est réfléchi à l'extrémité de la ligne et s'est transformée en une onde progressive suivant $-\vec{u}_x$, la superposition de ces deux ondes donnant l'onde stationnaire.)

Par ailleurs, les conditions initiales et les conditions aux limites suffisent à calculer toutes les constantes apparues lors de la résolution.

1.1.3 Retour sur la ligne bifilaire idéale.

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale (cable coaxial) est composée d'une inductance $l \cdot dx$ et d'une capacité γdx .

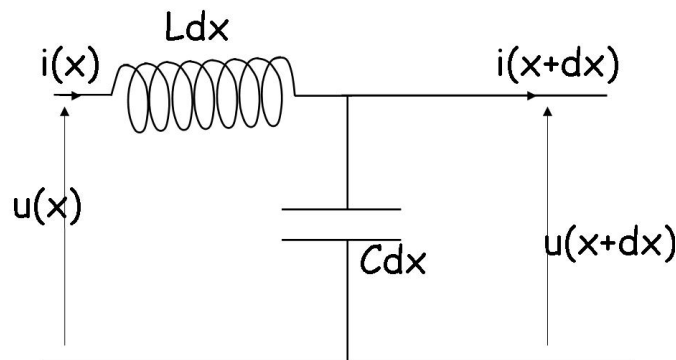


FIGURE 1.3 – Modèle d'une tranche dx de câble coaxial idéal .

1. Rappeler pourquoi il est possible de travailler sur la tranche d'épaisseur dx dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) alors que le phénomène étudié est un phénomène de propagation.
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ et $i(x,t)$.
3. Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ sont solutions d'équations de d'Alembert. Quelle est la vitesse de propagation des ondes ?
4. Etablir la relation de dispersion.
5. Pour une OPPH selon $+\vec{u}_x$, montrer que le rapport $\frac{u}{i}$ est lié à une caractéristique de la ligne.
6. Dans le cas où cette ligne est semi infinie, fermée en $x = 0$ par un court circuit et qu'une OPPH incidente selon $+\vec{u}_x$ $u_i(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ est émise, calculer $v(x, t)$ et $i(x, t)$.

(Réponse : Il faut donc supposer l'existence d'une onde réfléchie et chercher les conditions aux limites, on montre alors que $v(x, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$)

1.2 Dispersion et absorption

1.2.1 La ligne bifilaire réelle.

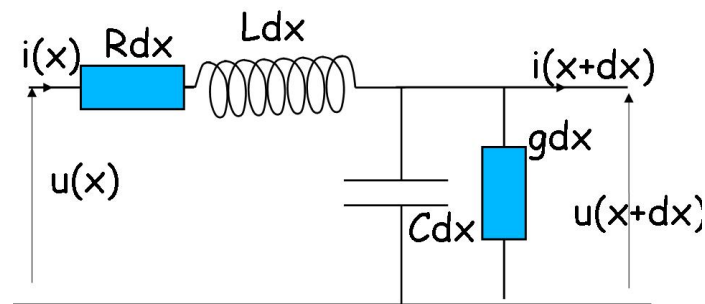


FIGURE 1.4 – Modèle d'une tranche dx d'un câble coaxial réel.

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance $l \cdot dx$ et d'une capacité γdx . Pour rendre compte des imperfections de la ligne bifilaire, il faut ajouter en série une résistance $r dx$ à l'inductance et une conductance $g dx$ en parallèle du condensateur.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(x, t)$ et $i(x, t)$.
2. Etablir la relation de dispersion. Montrer qu'elle est de la forme $k^2 = \omega^2 l \gamma - j \omega (l g + r \gamma) - r g$. Commenter cette expression dans le cas où $r = 0$ et $g = 0$.

1.2.2 Dispersion et absorption.

Une fois l'équation de propagation trouvée, nous l'avons vu, il est commode de chercher la forme des solutions sous forme d'une OPPH de la forme $A_0 \cdot \exp(j\omega t - j\vec{k} \cdot \vec{r})$. En injectant cette forme dans l'équation de propagation, on trouve l'équation liant k et ω . Cette équation s'appelle **relation de dispersion**.

Dans l'exemple extrait de l'exercice sur la ligne bifilaire (cf. supra) qui modélise un câble coaxial : $k^2 = \omega^2 l \gamma - j \omega (l g + r \gamma) - r g$

Pour dégager le contenu physique de la relation de dispersion, il est aisé de supposer ω réel (à l'entrée de la ligne, on impose un signal sinusoïdal) et alors k est un complexe, qui peut s'écrire de la

forme $k(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$.

Remarque 2 : quand k est complexe (ou ω), l'onde porte alors le nom de pseudo onde plane progressive harmonique (OPPH*).

Pour dégager le sens physique de k' et k'' , il faut revenir à l'onde en réel.

$$a(x, t) = A_0 \exp(k'' \cdot x) \cos(\omega \cdot t - k' \cdot x)$$

Absorption.

Le fait que k possède une partie imaginaire donne naissance à un terme réel, caractéristique d'un amortissement $k'' < 0$ (le cas de l'amplification est rare sauf dans les lasers $k'' > 0$). Le milieu est alors dit **absorbant** et l'absorption s'effectue sur une distance caractéristique

$$d = \frac{1}{|k''|}$$

Au delà d'une distance de quelques d , l'onde ne se fait plus sentir.

Dispersion : vitesse de phase et vitesse de groupe.

la vitesse de phase.

La phase $\varphi(t) = \omega t - k'x$ se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)}$. ($\varphi(t) = \omega t - k'x = \omega(t - \frac{x}{v_\varphi})$).

Cette vitesse de phase dépend a priori de la pulsation ω de l'onde étudiée, tant et si bien que deux ondes de pulsations différentes n'ont pas la même vitesse de propagation. Les ondes de pulsation différentes sont donc dispersées. Le milieu est dit **dispersif**.

Pour bien comprendre le phénomène de dispersion, il ne faut donc pas se contenter d'étudier une seule OPPH* mais une superposition d'OPPH* appelée **paquet d'onde**.

le paquet d'onde.

Pour étudier un problème d'onde dont l'équation de propagation est linéaire à coefficient constant, il faut procéder comme tel :

1. utiliser la décomposition en harmonique de l'excitation $\underline{a}(x = 0, t) = \sum_{\omega} \hat{a}(\omega) \exp(j\omega t)$ (La somme peut être une somme continue i.e. une intégrale)
2. étudier la propagation de chacune des composantes
3. en déduire alors la déformation du signal

Etudions donc la propagation du paquet d'onde.

Lors de la propagation du signal, chaque composante $\hat{a}(\omega) \exp(j\omega t)$ devient $\hat{a}(\omega) \exp(j\omega t - jk'(\omega)x)$. Le signal global est alors la superposition de toutes les composantes que l'on nomme paquet d'onde.

$$\underline{a}(x, t) = \sum_{\omega} \hat{a}(\omega) \exp(j\omega t - jk'(\omega)x)$$

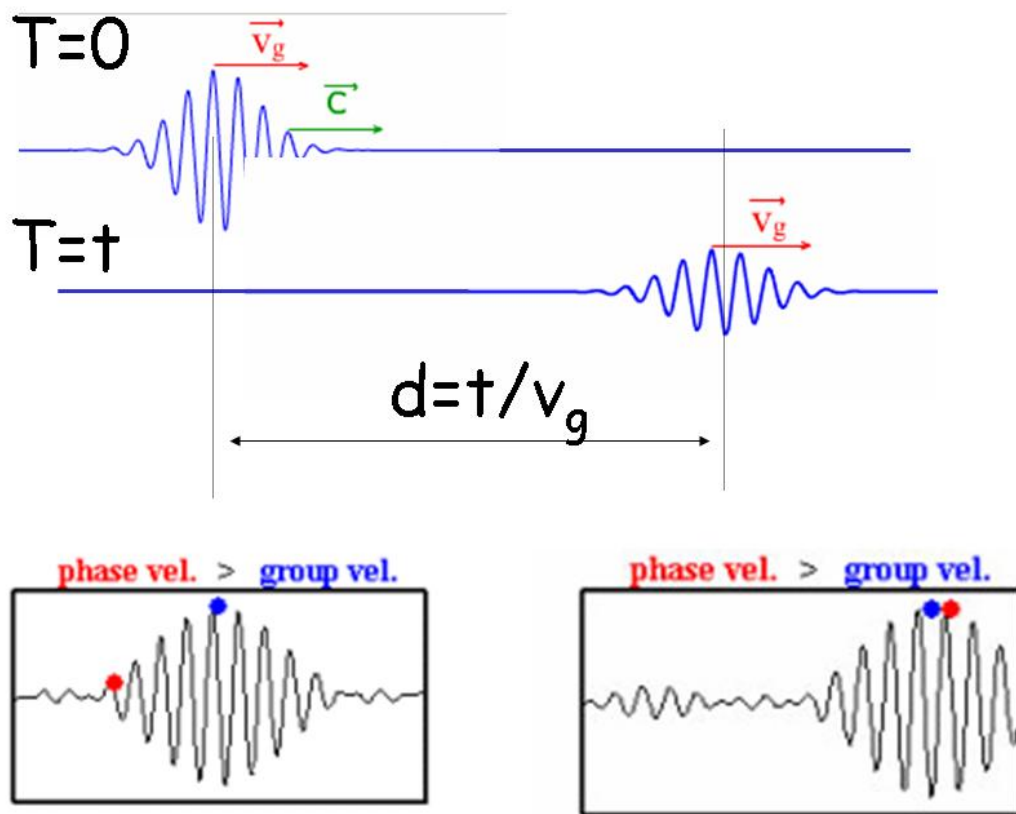


FIGURE 1.5 – Déformation du paquet d'onde dans un milieu dispersif.

Pour extraire de l'information du signal, on va supposer que toutes les ondes qui composent le paquet d'onde ont une pulsation voisine d'une pulsation moyenne ω_0 et donc nous allons faire un Développement Limité au voisinage de ω_0 :

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0) = \omega_0 + \delta\omega$$

$$k'(\omega) = k'(\omega_0) + \left. \frac{dk'}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) = k'_0 + \frac{dk'}{d\omega} \delta\omega$$

On remplaçant dans les expressions, il vient :

$$\underline{a}(x, t) = \sum_{\omega} \hat{a}(\omega) \exp(j(\omega_0 + \delta\omega)t - j(k'_0 + \frac{dk'}{d\omega} \delta\omega)x)$$

Soit, en sortant de la somme les terme devenu indépendant de ω :

$$\underline{a}(x, t) = \exp(j\omega_0 t - jk'_0 x) \sum_{\omega} \hat{a}(\omega) \exp(j\delta\omega t - j \frac{dk'}{d\omega} \delta\omega x)$$

Le premier terme $\exp(j\omega_0 t - jk'_0 x)$ désigne la propagation de l'onde moyenne alors que $\sum_{\omega} \hat{a}(\omega) \exp(j\delta\omega(t - \frac{dk'}{d\omega} x))$ désigne la propagation de l'enveloppe du signal, dont la vitesse de propagation est la **vitesse de groupe** :

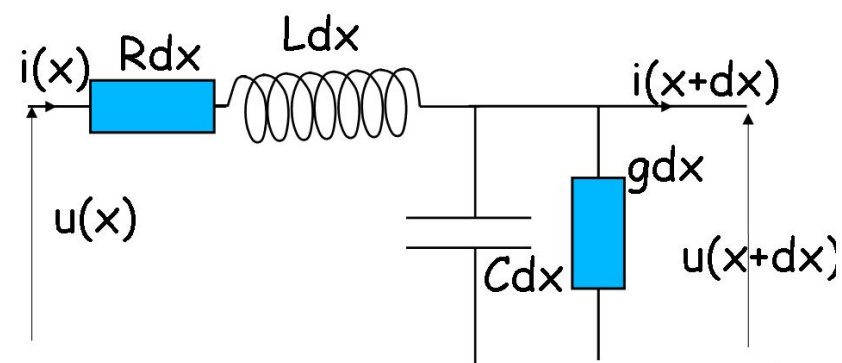
$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk'} \right|_{\omega_0}$$

La vitesse de phase diffère donc de la vitesse de groupe, ce qui fait que le paquet d'onde se déforme en se propageant. Tel est la caractéristique d'un phénomène dispersif.

1.2.3 Retour sur la ligne bifilaire réelle.

Une tranche infinitésimale dx d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance $l \cdot dx$ et d'une capacité γdx . Pour rendre compte des imperfections de la ligne bifilaire, il faut ajouter en série une résistance $r dx$ à l'inductance et une conductance $g dx$ en parallèle du condensateur.

1. Rappeler pourquoi il est possible de travailler sur la tranche d'épaisseur dx dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) alors que le phénomène étudié est un phénomène de propagation.
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u(x, t)$ et $i(x, t)$.
3. Etablir la relation de dispersion. Montrer qu'elle est de la forme $k^2 = \omega^2 l \gamma - j\omega(lg + r\gamma) - rg$. Commenter cette expression dans le cas où $r = 0$ et $g = 0$.
4. Calculer la vitesse de phase, la vitesse de groupe ainsi qu'une distance caractéristique de l'amortissement.
5. Montrer que pour un choix judicieux de r et g , la vitesse de phase et l'amortissement sont indépendant ω . Justifier l'intérêt de ce choix.

FIGURE 1.6 – Modèle d'une tranche dx d'un câble coaxial réel.

Chapitre 2

Rappel d'électromagnétisme.

2.1 Equation de Maxwell.

Les équations de Maxwell décrivent comment des charges volumiques (ρ) et des courants volumiques \vec{j} créent un champ électromagnétique \vec{E}, \vec{B} .

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

2.2 Energie électromagnétique.

Le vecteur de Poynting de l'onde électromagnétique est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

La puissance électromagnétique transportée à travers une surface S est le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface :

$$P_{(S)} = \int \int_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

L'énergie volumique associée à l'onde électromagnétique est :

$$u_{e\ m} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

L'énergie électromagnétique dans le volume V est :

$$U_{e\ m} = \iiint u_{e\ m} dV$$

Au bilan, l'équation énergétique locale en électromagnétisme s'écrit :

$$\operatorname{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial u_{e\ m}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

(Ce qui s'interprète en disant que les variations d'énergie électromagnétiques sont dues à la propagation de l'onde, donc aux flux du vecteur de Poynting, soit à l'absorption par le milieu. Cette équation se démontre à partir des équations de Maxwell et l'analyse vectorielle).

2.3 Relation de passage.

Intéressons nous à l'interface entre deux milieux 1 et 2. Cette interface est susceptible de porter une charge surfacique σ ainsi qu'un courant surfacique \vec{j}_S .

L'intégration des équations de Maxwell entre deux points très proches de l'interface, un point M_1 du milieu 1 et un point M_2 du milieu 2, conduit aux relations suivantes :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ donne } E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ donne } B_{2n} - B_{1n} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ donne } E_{2t} - E_{1t} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ donne } B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Ces équations se résument en deux équations, qui pour un point M_1 du milieu 1 et un point M_2 du milieu 2, voisins de l'interface :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (2.5)$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (2.6)$$

Chapitre 3

Les ondes électromagnétiques dans le vide.

3.1 Equation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

1. Rappeler les équations de maxwell dans le vide.

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (3.1)$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.3)$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.4)$$

2. Montrer l'équation de propagation de \vec{E} dans le vide est :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

3. Montrer l'équation de propagation de \vec{B} dans le vide est :

$$\vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

4. Etudier la structure des OPP dans le vide, en revenant aux équations découplées du premier ordre.

- (a) Montrer tout d'abord que la relation de dispersion est

$$k = \frac{\omega}{c}$$

(b) Montrer que l'onde est transversale :

$$\vec{u} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{B} = 0$$

(c) Montrer que

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

(d) Ces résultats sont ils généralisables à une OPP ?

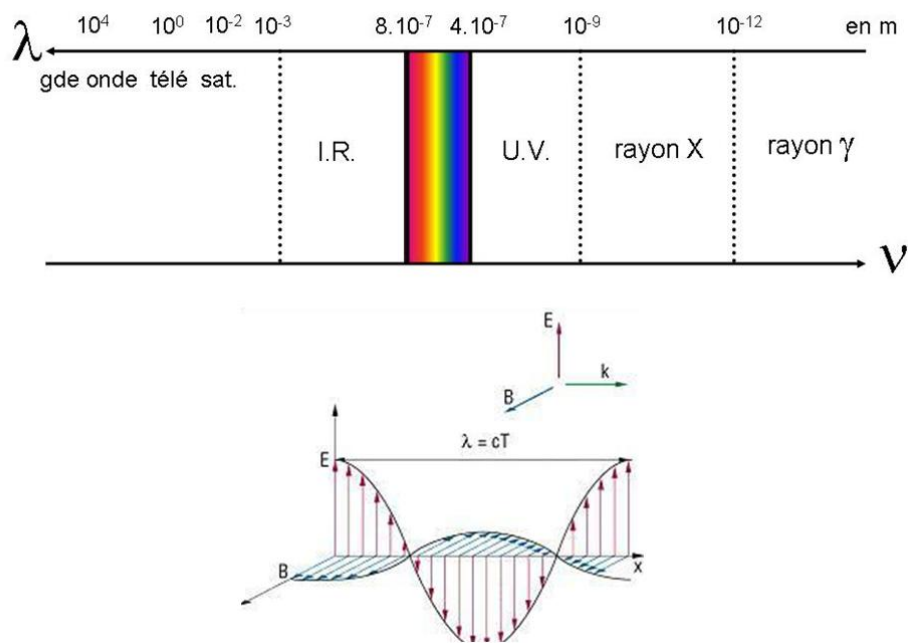


FIGURE 3.1 – Onde électromagnétique.

3.2 Rappel sur la polarisation des OPPH.

La direction du champ électrique de l'onde électromagnétique est appelée direction de polarisation. Par convention dans ce qui suit, \vec{u}_x désigne la direction de propagation.

La polarisation elliptique correspond à
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 y \cos(\omega t - kx) \\ \pm E_0 z \cos(\omega t - kx + \varphi) \end{pmatrix}$$
 Le signe + correspond à la PE gauche et le signe - à la PE droite. (Pour le voir, regarder l'onde arrivée.)

La polarisation circulaire correspond à $\vec{E} = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t - kx) \\ \pm E_0 \sin(\omega t - kx) \end{cases}$ Le signe + correspond à la PC gauche et le signe - à la PC droite. (Pour le voir, regarder l'onde arrivée.)

La polarisation rectiligne correspond à

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

La polarisation rectiligne permet d'étudier n'importe quelle polarisation. Néanmoins, laissez-vous guider par la situation. Si celle-ci suggère d'utiliser la polarisation circulaire, qui constitue aussi une base génératrice de l'ensemble des solutions, il faut le faire. Ainsi par exemple quand on veut étudier les propriétés de chiralité, c'est la base des OPPH polarisées circulairement qu'il faut utiliser.

3.3 Aspect énergétique de la propagation des ondes électromagnétiques

Pour effectuer les calculs énergétiques, il est conseillé de revenir aux formes réelles des expressions (donc ne plus utiliser les notations complexes) car en effet les formes des énergies sont quadratiques (E^2 , B^2 , ...) et donc non linéaires donc non adaptés à la notation complexe.

Le vecteur de Poynting de l'onde électromagnétique est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

La puissance électromagnétique transportée à travers une surface S est le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface :

$$P_{(S)} = \int \int_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Dans le cas d'une OPPH PR suivant \vec{u}_y , $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$, on trouve alors

$$\vec{\Pi} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x$$

Comme il faut s'intéresser à la valeur moyenne temporelle de cette expression puisque les détecteurs ne sont en général sensibles qu'à la valeur moyenne compte tenu de la fréquence élevée du signal

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

L'énergie volumique associée à l'onde électromagnétique est :

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

L'énergie électromagnétique dans le volume V est :

$$U_{e\ m} = \int \int \int u_{e\ m} dV$$

Dans le cas d'une OPPH PR suivant \vec{u}_y , $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$, on trouve alors

$$u_{e\ m} = \epsilon_0 E^2$$

soit en valeur moyenne

$$\langle u_{e\ m} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

Noter l'équipartition de l'énergie entre les deux contributions, électrique et magnétique (résultat identique à celui rencontré pour les ondes sonores.)

L'énergie se propage donc à la vitesse c de l'onde.

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle u_{e\ m} \rangle c \vec{u}_x$$

Néanmoins, comme pour les ondes sonores, il convient de noter le caractère non physique de l'OPPH choisie puisque $\langle u_{e\ m} \rangle$ est uniforme, indépendant du point de l'espace et que donc une intégration sur tout l'espace conduit à une énergie infinie (l'OPPH ayant une extension infinie, rien de surprenant à cela) mais il ne faut pas s'alarmer de ce résultat car la solution est une superposition d'OPPH, (car les équations sont linéaires), et alors ce problème disparaît.

Au bilan, l'équation énergétique locale en électromagnétisme s'écrit :

$$\text{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial u_{e\ m}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

(Ce qui s'interprète en disant que les variations d'énergie électromagnétiques sont dues à la propagation de l'onde, donc aux flux du vecteur de Poynting, soit à l'absorption par le milieu. Cette équation se démontre à partir des équations de Maxwell et l'analyse vectorielle).

Ici, comme on s'intéresse aux ondes dans le vide, il n'y a pas de perte par absorption dans le milieu $\vec{j} \cdot \vec{E} = 0$. D'où l'équation analogue à celle obtenue pour les ondes sonores :

$$\text{div}(\vec{\Pi}) + \frac{\partial u_{e\ m}}{\partial t} = 0$$

La forme intégrée (avec le théorème d'Ostrogradski) :

$$\int \int_S (\vec{\Pi}) + \frac{d}{dt} U_{e\ m} = 0$$

3.4 Rayonnement dipolaire, introduction aux antennes.

Le caractère non physique de l'OPPH a déjà été évoqué : l'idée étant que l'OPPH est aisée pour la résolution et permet de reconstruire par transformée de Fourier toutes les solutions, dont l'énergie ne diverge pas sur l'espace.

Ce paragraphe va apporter un autre élément de réponse au problème puisque nous allons montrer qu'une onde réelle peut s'assimiler localement à une OPPH.

3.4.1 Présentation du modèle : dipôle oscillant dans sa zone de rayonnement.

Nous allons nous intéresser au modèle du dipôle oscillant et considérer donc un ensemble de particules dont le moment dipolaires électriques s'écrit

$$\vec{P} = P_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

L'extension géométrique de ce dipôle, notée a est supposée très inférieure à la longueur d'onde $a \ll \lambda = c.T$ du rayonnement émis. Si on s'intéresse à des ondes visibles $\lambda \simeq 600nm$, les atomes qui émettent ont une extension de l'ordre de l'Angström. L'approximation est bien vérifiée. Pour les téléphones portables, la longueur d'onde est plutôt de l'ordre du centimètre et les antennes millimétrique, l'approximation est donc un peu plus limite.

En outre, on va s'intéresser non pas au champ proche mais au champ loin, dans la zone de rayonnement, donc en un point M située à une distance $OM = r$ du dipôle telle que $r \gg \lambda$.

Au final, l'étude s'effectue sur trois échelles spatiales très différentes :

$$a \ll \lambda \ll r$$

3.4.2 Expression du champ rayonné.

Les nouveaux programme de CPGE ne demande plus la démonstration de ces expressions, qui se faisait à partir des équations des potentiels retardés.

L'expression de \vec{E}, \vec{B} est aujourd'hui admise mais il faut savoir la commenter.

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \vec{u}_\varphi$$

1. L'amplitude du champ rayonné décroît en $\frac{1}{r}$ (en électrostatique, le champ du dipôle décroît en $\frac{1}{r^3}$). Cette décroissance en $\frac{1}{r}$ est lié à la répartition de la puissance sur une sphère. (cf. partie suivante)

2. L'amplitude du champ rayonné dépend de $\sin \theta$ et est donc anisotrope : l'amplitude est nulle sur l'axe z , qui est l'axe du dipôle et est maximal dans le plan équatorial Oxy .
3. Le champ est lié à la dérivée seconde du moment dipolaire, ce qui signifie que seule les charges accélérées sont susceptibles d'émettre une onde électromagnétique. (Penser aux particules chargées dans les accélérateurs de particules qui rayonnent, ce qui est mis à profit parfois pour faire de l'imagerie par rayon X, c'est le projet Soleil du CEA)
4. Le champ correspond à une onde progressive comme en témoigne le facteur $t - \frac{r}{c}$
5. le champ possède localement la structure d'une onde électromagnétique plane progressive dans le vide selon la direction \vec{u}_r puisque

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

Néanmoins, cette analyse n'est que local puisque l'amplitude décroît et est anisotrope.

3.4.3 Puissance rayonnée.

Le vecteur de Poynting de cette onde électromagnétique est :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_r = \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^2 c} \ddot{p}^2 \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

La puissance totale rayonnée est donc

$$\langle P \rangle = \int \int_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \langle \ddot{p}^2 \rangle \left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

La puissance rayonnée est donc indépendante du rayon r de la sphère. Ceci est lié à la décroissance en $\frac{1}{r}$ de l'amplitude des champs, qui n'est donc pas lié à un phénomène d'absorption mais à la répartition de la puissance sur la surface d'une sphère (en r^2).

3.4.4 La diffusion Rayleigh et le bleu du ciel.

Alors que la lumière du soleil est dominée par le jaune et non polarisée, la lumière du ciel est bleue (par beau temps) et partiellement polarisée voir totalement polarisée dans une direction d'observation précise.

Pour rendre compte de ces observations, il faut être conscient que l'onde électromagnétique incidente interagit avec les molécules de l'atmosphère qui se comportent alors comme des dipôles oscillant (excité par l'onde incidente), ces dipôles rayonnent alors une onde dans toutes les directions : la lumière incidente est diffusée.

Pour étudier quantitativement le phénomène, il faut recourir au modèle de l'électron élastiquement lié, dont les hypothèses sont les suivantes :

1. les électrons sont traités indépendamment

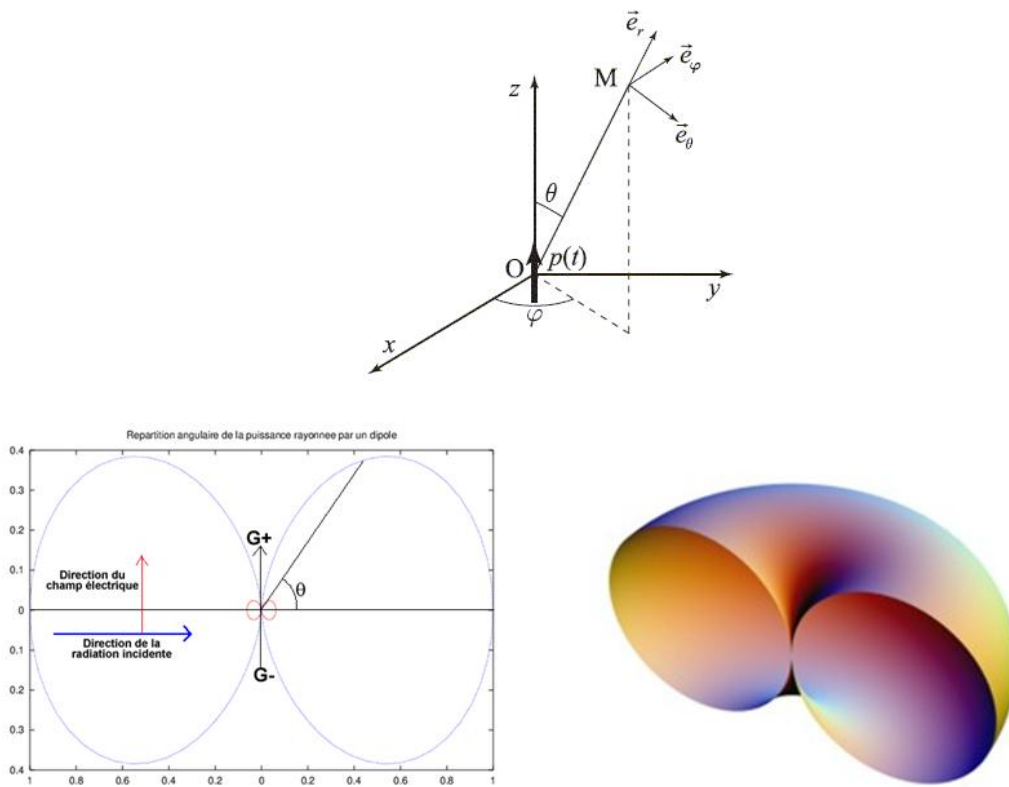


FIGURE 3.2 – Rayonnement des ondes électromagnétiques par le dipôle oscillant.

2. Chaque électrons est assimilé à un oscillateur harmonique amorti. L'électron est donc soumis à une force de rappel $-m\omega_0\vec{r}$ (l'électron est lié au noyau) et une force de frottement fluide $-m\Gamma\dot{\vec{r}}$ (le dipôle rayonne donc perd de l'énergie). $\omega_0 \simeq 10^{16}rad.s^{-1}$ et $\Gamma \simeq 10^8rad.s^{-1} \ll \omega_0$
3. L'électron est soumis à la force électromagnétique lié à la présence de l'onde $\omega \simeq 3.10^{15}rad.s^{-1}$ pour le visible, mais la contribution magnétique est négligeable $\frac{f_m}{f_e} \frac{qvB}{qE} \frac{v}{c} \ll 1$.

La seule force est donc la force électrique $\vec{f} = -eE_0\vec{u}_z \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$, en prenant pour onde incidente une OPPH PR. Mais comme l'amplitude du mouvement $0,1nm$ de l'électron est supposée très faible devant la longueur d'onde $600nm$, l'expression précédente se simplifie en $\vec{f} = -eE_0\vec{u}_z \cos(\omega t)$.

1. Montrer que le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron conduit à

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\Gamma\dot{\vec{r}} - m\omega_0\vec{r} - eE_0\vec{u}_z \cos(\omega t)$$

2. En utilisant la notation complexe (l'équation étant linéaire à coefficient constant et que l'on s'intéresse au régime forcé), montrer que :

$$\underline{\vec{r}} = -\frac{eE_0\vec{u}_z \exp(j\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega)}$$

soit

$$\underline{\vec{p}} = -e\underline{\vec{r}} = \frac{e^2E_0\vec{u}_z \exp(j\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega)}$$

3. Montrer que compte tenu des ordres de grandeurs ci dessus,

$$\underline{\vec{p}} = \frac{e^2E_0\vec{u}_z \exp(j\omega t)}{m\omega_0^2}$$

4. En revenant au notation réelle (puisque la puissance rayonnée est quadratique), montrer que

$$\ddot{\vec{p}} = -\frac{e^2\omega^2E_0\vec{u}_z \cos(\omega t)}{m\omega_0^2}$$

5. Montrer à partir des résultats ci dessus que

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} = \frac{\mu_0 e^4 \omega^4 E_0^2}{12\pi m^2 \omega_0^2 c}$$

De cette expression, il est possible d'interpréter les observations. D'une part, la puissance rayonnée est proportionnelle à ω^4 donc le rayonnement dans le bleu est 16 fois plus important que dans le rouge. De là, il est aussi possible d'interpréter la couleur rouge du soleil couchant. En effet, comme la diffusion est plus importante dans le bleu que dans le rouge, l'absorption est donc plus importante dans le bleu que dans le rouge. Au couchant, quand la couche d'atmosphère traversée est plus importante, tout le rayonnement bleu est absorbé, et le soleil est rouge.

Pour la polarisation, elle est lié au fait qu'un dipôle ne rayonne rien sur son axe.

Le rayonnement des antennes fonctionne sur le principe des dipôles rayonnants. L'antenne est discrétisée (découpée) en une somme de dipôle et le rayonnement de chacun de ces dipôles est susceptible d'interférer.

3.5 Le guide d'onde : dispersion due aux conditions aux limites.

Considérons le guide d'onde de longueur infinie est de section rectangulaire $a.b$: $0 < x < a$ et $0 < y < b$. Il est fait de métal assimilé à un conducteur parfait (donc le champ électrique et magnétique à l'intérieur du métal est nul.) L'intérieur du guide d'onde est remplie d'air assimilé à du vide.

1. A partir des équations de passages des champs, justifier que la composante tangentielle au métal du champ électrique est nulle $\vec{E}_t = \vec{0}$ et que la composante normale au métal du champ magnétique est nulle $\vec{B}_n = \vec{0}$
2. Dans la suite, on cherche des solutions de la forme $\underline{\vec{E}} = A(x, y) \exp(j\omega t - jk_g z) \vec{u}_y$.
Montrer que A ne dépend pas de y.
Montrer que l'équation dont A est solution est

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right) A = 0$$

Compte tenu des Conditions aux limites, montrer que $\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 > 0$. Montrer alors que

$$\vec{E}_n = A_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp(j\omega t - jk_{g,n} z) \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad k_{g,n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

Commenter l'expression du champ, à x fixé d'une part et à z fixé d'autre part.

3. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
4. Calculer le champ magnétique \vec{B}_n en justifiant la nécessité de revenir aux équations de Maxwell pour ce calcul. Vérifier que la forme proposée vérifie les conditions aux limites.
5. Calculer la puissance moyenne temporelle du vecteur Poynting et montrer que

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{A_{0,n}^2 k_{g,n}}{2\mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{u}_z$$

Commenter cette expression En déduire que

$$\langle P \rangle = \frac{A_{0,n}^2 k_{g,n} a \cdot b}{4\mu_0 \omega}$$

Commenter.

6. Montrer que l'énergie électromagnétique moyenne par unité de longueur du guide est

$$\left\langle \frac{dU_{em}}{dz} \right\rangle = \frac{\epsilon_0 A_{0,n}^2 ab}{4}$$

7. Déduire des deux expressions ci avant la vitesse de propagation de l'énergie v_e
8. Réinterpréter l'expression de \vec{E}_n comme une superposition de deux OPPH.

$$\vec{E}_n = -\frac{jA_{0,n}}{2} \exp(j\omega t - jk_{g,n} z - j\frac{n\pi}{a} x) \vec{u}_y + \frac{jA_{0,n}}{2} \exp(j\omega t - jk_{g,n} z + j\frac{n\pi}{a} x) \vec{u}_y$$

Réinterpréter alors la forme de \vec{B}_n

Chapitre 4

Onde dans les milieux.

4.1 L'effet de peau : électromagnétisme dans les métaux.

On s'intéresse à un conducteur pour lequel la loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

1. Etude de la densité volumique de charge ρ du conducteur.

Montrer à partir de l'équation de conservation de la charge que ρ est solution de l'équation :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Sachant que $\sigma \simeq 10^8 S.m^{-1}$, calculer un ordre de grandeur des variations temporelles de ρ . Sachant que l'on s'intéresse à des fréquences $< 10^{16} Hz$, justifier que l'on peut considérer $\rho = 0$. Ce résultat est général : un conducteur est localement neutre.

2. Montrer dans l'équation de Maxwell $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ que le terme $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant le terme $\mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$.

Les équations de Maxwell sont alors les mêmes que dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires.

3. Montrer à partir des équations de Maxwell dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires que l'équation de propagation est

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4. Cette équation est une équation de diffusion. Donner alors la dimension du coefficient D et une première estimation de l'épaisseur de peau.

5. On suppose alors que le métal occupe tout le demi espace $z > 0$, l'espace $z < 0$ étant occupé par l'air assimilé à du vide. La solution cherchée est de la forme $\vec{E} = E(z, t) \vec{u}_x$

Montrer que la relation de dispersion est la suivante

$$k^2 = -j \mu_0 \sigma \omega$$

6. En utilisant le fait que $-j = \frac{(1-j)^2}{2}$, trouver l'expression de $k(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$. En déduire la forme de \vec{E} et conclure quand à l'épaisseur de peau.
7. Calculer le champ magnétique résultant.

4.2 ondes électromagnétiques dans les plasmas.

Un plasma d'hydrogène est un milieu assimilé à un gaz où les atomes d'hydrogène sont totalement ionisés, donc le plasma est constitué d'électron $(-e, m_e)$ et de proton (e, m_p) . Au repos, en l'absence de perturbation, le plasma est localement neutre : il y a n_0 électrons par unité de volume et n_0 protons par unité de volume.

4.2.1 Onde longitudinale dans les plasmas

On étudie dans cette partie l'effet d'une onde électromagnétique $\vec{E}_1 = E_1(x, t)\vec{u}_x = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_x$, \vec{B}_1 .

Cette onde met en mouvement les charges et on note $\vec{v}_e = \vec{v}_{1,e}(x, t)\vec{u}_x$ la vitesse des électrons et $\vec{v}_p = \vec{v}_{1,p}(x, t)\vec{u}_x$ celles des protons.

De plus, cette onde modifie la répartition spatiaux-temporelle des charges de telle sorte que le nombre de charges par unité de volume en présence de l'onde s'écrit pour les électrons $n_e = n_0 + n_{1,e}(x, t)$ et de manière similaire pour les protons $n_p = n_0 + n_{1,p}(x, t)$.

Tous les champs d'ordre 1 introduits sont des infiniments petits du même ordre et on se limite à l'ordre 1 en cet infiniment petit.

1. Justifier l'appellation onde plane et longitudinale.
2. Montrer que $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$. En déduire $\vec{B}_1 = \vec{0}$
3. Calculer la densité de courant volumique \vec{j} . En déduire avec l'équation de conservation de la charge que

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{n_0 e}{\epsilon_0} (v_{1,p} - v_{1,e})$$

4. En appliquant la seconde loi de Newton a un électron, montrer que

$$\frac{\partial v_{1,e}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} E_1(x, t)$$

5. Faire de même avec les protons et montrer qu'alors $v_{1,p} \ll v_{1,e}$.
6. Montrer alors que la relation de dispersion est

$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}$$

Commenter le comportement du plasma.

7. Calculer le vecteur de Poynting, et l'énergie moyenne volumique, et les pertes par effet joule en valeur moyenne.

$$(\vec{\Pi} = \vec{0}, \langle U_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \text{ et } \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \vec{0})$$

4.2.2 Onde transversale dans les plasmas

On étudie dans cette partie l'effet d'une onde électromagnétique $\vec{E}_1 = E_1(x, t)\vec{u}_x = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$, \vec{B}_1 .

Cette onde met en mouvement les charges et on note $\vec{v}_e = \vec{v}_{1,e}(x, t)\vec{u}_x$ la vitesse des électrons et $\vec{v}_p = \vec{v}_{1,p}(x, t)\vec{u}_x \simeq 0$ puisque comme dans la partie précédente la vitesse des protons peut être négligé devant celle des électrons.

De plus, cette onde modifie a priori la répartition spatiaux-temporelle des charges de telle sorte que le nombre de charges par unité de volume en présence de l'onde s'écrit pour les électrons $n_e = n_0 + n_{1,e}(x, t)$.

Tous les champs d'ordre 1 introduits sont des infiniments petits du même ordre et on se limite à l'ordre 1 en cet infiniment petit.

1. Montrer que le plasma reste localement neutre à partir des équations de Maxwell, soit $n_{1,e} = 0$ (la répartition de charge reste uniforme, n_0)
2. Montrer que

$$\vec{B}_1 = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$$

3. En justifiant brièvement que l'on peut négliger la force magnétique devant la force électrique, étudier le mouvement de l'électron.
En déduire que la conductivité complexe du plasma :

$$\vec{j} = \underline{\sigma} \vec{E} \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma} = \frac{n_0 e^2}{j m_e \omega}$$

Qu'en déduire pour la puissance dissipée par effet Joule (puissance cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge) ?

$$(\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \vec{0})$$

4. Montrer que la relation de dispersion est

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e}$$

5. Pour qu'une onde progressive puisse exister, montrer qu'il faut que

$$\omega > \omega_C = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}}$$

6. Calculer alors la vitesse de phase et de groupe en fonction de ω et ω_C . Commenter.

$$(v_{\text{varphi}} = c \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_C^2}} \text{ et } v_g = c \sqrt{\omega^2 - \omega_C^2})$$

7. Interpréter le comportement haute fréquence.

(A trop haute fréquence, l'inertie des e^- les empêchent de bouger et le milieu se comporte alors comme le vide)

Les ondes radio modulées en amplitude (AM) ont une fréquence inférieure à la fréquence de coupure de la ionosphère. Ces ondes sont donc totalement réfléchies par la ionosphère et ainsi il est possible d'entre radio Londres de France (La propagation en ligne droite ne suffisant pas.) Par contre, pour la FM, qui utilise des fréquences plus élevées supérieures à la fréquence de coupure, les ondes traversent la ionosphère ce qui limite la portée de ces ondes...

4.3 Réexpression des équations de Maxwell dans les milieux.

Dans les milieux, ils existent deux types de charges : les charges libres (que nous avons étudié jusqu'alors : les électrons dans un métal sont libres de se déplacer sur l'ensemble du métal, il en est de même des électrons dans un plasma) et les charges liées. Ces charges liées sont, comme leur nom l'indique, le mouvement des charges (les électrons) qui restent liées à l'atome mais qui subissent le champ électromagnétique extérieure. Les équations de Maxwell tel que nous avons les écrites jusqu'alors restent vraies avec $\rho = \rho_{libre} + \rho_{lie}$ et $\vec{j} = \vec{j}_{libre} + \vec{j}_{lie}$. Mais il faut trouver une expression de ρ_{lie} et \vec{j}_{lie} .

4.3.1 Expression générale des équations de Maxwell dans la matière.

Les charges liées et les courants liés se manifestent dans la matière par deux grandeurs : le vecteur polarisation \vec{P} (moyenne à l'échelle mésoscopique des vecteurs dipôles électriques) et le vecteur aimantation \vec{M} (moyenne à l'échelle mésoscopique des vecteurs dipôles magnétiques).

On peut alors montrer que :

$$\begin{aligned}\rho_{lie} &= -\text{div}(\vec{P}) \\ \vec{j}_{lie} &= \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{M})\end{aligned}$$

En injectant ces expressions dans les équations de Maxwell et en définissant, le vecteur déplacement électrique $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ et le vecteur excitation magnétique $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{libre} \quad (4.1)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.4)$$

Le vecteur de Poynting se redéfinit alors comme :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (4.5)$$

Il ne s'agit que d'une réexpression simplement plus commode à manipuler.

4.3.2 Modèle de milieu diélectrique linéaire homogène isotrope peu dense.

Dans les milieux diélectriques linéaire homogène isotrope, comme nous allons le voir, il existe un lien aisée à manipuler entre \vec{D} , \vec{E} .

$$\vec{D} = \underline{\epsilon}(\omega)\vec{E} == \underline{\epsilon}_r(\omega).\epsilon_0\vec{E}$$

$\underline{\epsilon}_r(\omega)$ étant appelé permittivité relative du milieu (qui est un complexe).

Par ailleurs, si le milieu est diélectrique, il n'a pas d'effet magnétique donc $\vec{M} = \vec{0}$ et donc $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$.

4.3.3 Le gaz, exemple de milieu diélectrique linéaire homogène isotrope peu dense

Tout cela reste très théorique. Il est donc nécessaire de se donner un exemple précis. Or la plupart des gaz peuvent se décrire comme des milieux diélectriques linéaire homogène isotrope peu dense. Les électrons des molécules sont par ailleurs modélisables à l'aide du modèle de l'électron élastiquement lié, modèle que nous avons déjà rencontré et qui décrit bien le problème de ce chapitre : les charges liées.

Nous avons montré en appliquant le pfd à un électrons que :

$$\vec{r} = -\frac{eE_0\vec{u}_z \exp(j\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega)}$$

soit

$$\vec{p} = -e\vec{r} = \frac{e^2 E_0 \vec{u}_z \exp(j\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega)}$$

1. Montrer que $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = (1 + \frac{e^2 n^*}{m\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega)}) \cdot \epsilon_0\vec{E}$.
2. En identifier à $\vec{D} = \underline{\epsilon}(\omega)\vec{E} == \underline{\epsilon}_r(\omega).\epsilon_0\vec{E}$, montrer que $\underline{\epsilon}_r = 1 + \frac{e^2 n^*}{m\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega)}$

4.3.4 Etude des ondes dans un milieu diélectrique linéaire homogène isotrope peu dense.

1. Montrer à partir des équations de Maxwell dans les milieux que l'onde électromagnétique est transversale.

2. Montrer que la relation de dispersion devient $k^2 = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}$.

Soit $k = \underline{\epsilon}_r^{1/2} \frac{\omega}{c} = (1 + (\underline{\epsilon}_r - 1))^{1/2} \frac{\omega}{c} = (1 + \frac{\underline{\epsilon}_r - 1}{2}) \frac{\omega}{c}$.

On définit alors l'indice du milieu (complexe) $\underline{n} = n' + j.n'' = 1 + \frac{\underline{\epsilon}_r - 1}{2}$, tel que $k^2 = \underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2}$.

Et $\vec{B} = \frac{\underline{n}}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}$.

On dispose donc d'un modèle pour étudier les effets des gaz sur la propagation des ondes électromagnétiques, leur caractère dispersif (notable si $\omega \simeq \omega_0$) et absorbant (faible aussi sauf si $\omega \simeq \omega_0$).

4.3.5 Réflexion et réfraction d'une onde électromagnétique à l'interface de deux milieux diélectriques linéaires homogènes isotropes peu denses.

Il est alors aussi possible d'étudier la propagation d'une onde d'un milieu 1 diélectrique linéaire homogène peu dense d'indice n_1 à un milieu 2 diélectrique linéaire homogène peu dense d'indice n_2 à l'aide des relations de passage issues de la reformulation des équations de Maxwell.¹

Nous nous limiterons à l'étude sous incidence normale d'une onde incidente suivant \vec{u}_x sur une interface plane infinie en $x=0$ séparant le milieu diélectrique linéaire homogène peu dense d'indice n_1 en $x < 0$ à un milieu 2 diélectrique linéaire homogène peu dense d'indice n_2 en $x > 0$.

L'onde incidente est $\vec{E}_i = E_{0i} \cos(\omega t - k_1 x) \vec{u}_y$.

L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise :

L'onde réfléchie est $\vec{E}_r = E_{0r} \cos(\omega t + k_1 x) \vec{u}_y$.

L'onde transmise est $\vec{E}_t = E_{0t} \cos(\omega t - k_2 x) \vec{u}_y$.

1. A l'aide des équations de Maxwell dans les milieux, établir les relations de passage des champs.
2. Montrer qu'elles deviennent dans le cas étudié ici :

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$$

$$B_{0i} + B_{0r} = B_{0t} \text{ soit } n_1 \cdot E_{0i} - n_1 \cdot E_{0r} = n_2 \cdot E_{0t}$$

3. Calculer E_{0r} et E_{0t} afin que les relations de passage soient vérifiées. En particulier, on vérifiera que :

$$r = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

et que

$$t = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

4. Montrer alors que les coefficients en énergie sont :

$$R = \frac{\Pi_r}{\Pi_i} = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

et que

$$T = \frac{\Pi_t}{\Pi_i} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

5. Vérifier que l'énergie est conservée, soit $R + T = 1$
6. Pour l'interface air $n_1 \simeq 1$ verre $n_2 \simeq 1,5$, calculer R et T.
($R=0,04$ et $T=0,96$ La majorité de la lumière est transmise, la réflexion est faible.)

1. Supposer l'indice du milieu réel revient à des pulsations différentes des pulsations propres des molécules du milieu soit $\omega \neq \omega_0$.

Remarque : une étude sous incidence non normale est possible. Elle est juste plus calculatoire. L'étude des vecteurs d'onde permet dans un premier temps de démontrer les relations de Snell Descartes.

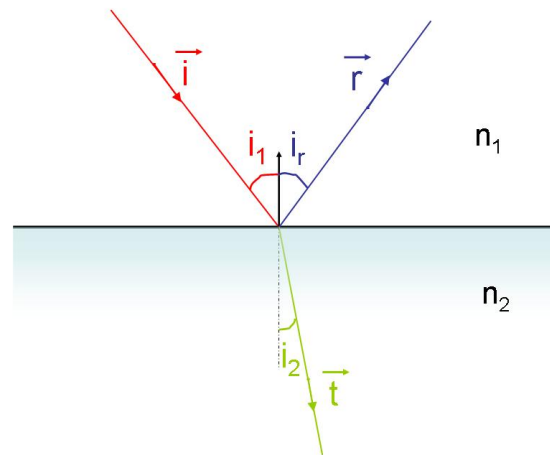


FIGURE 4.1 – Loi de Snell Descartes.

Les lois de Snell Descartes sont :

1. Le rayon réfléchi et le rayon transmis (ou réfracté) appartiennent au plan d'incidence.
2. Le rayon réfléchi est le symétrique du rayon incident par rapport à \vec{n} .

$$i_r = i_1$$

3. Le rayon réfracté ou transmis est tel que :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

Dans un second temps, il faut étudier les deux polarisations possible de l'onde. On peut alors montrer que pour une incidence particulière appelée incidence de Brewster, le rayon réfléchi ne possède qu'une polarisation rectiligne, la seconde est complètement éteinte.